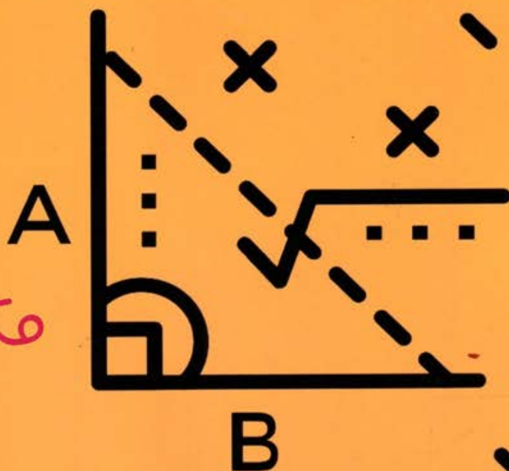
ميلو بيكمان

رياضيات بلا أرقام





ترجمة: مصطفى العدوي

- المؤلف: ميلو بيكمان
- العنوان: رياضيات بلا أرقام
- ترجمة: مصطفى العدوي
- الطبعة: الأولى 2024
- تصميم الغلاف: عمرو الكفراوي
- مستشار النشر: سوسن بشير
- المدير العام: مصطفى الشيخ

كيف تكتب تاريخ بلا أرقام



رقم الإيداع:
١٠١٤١ / ٢٠٢٣
الترقيم الدولي: ISBN
978-977-765-375-6

مكتبة
t.me/soramnqraa

الأربعاء قبل الأخيرة للشهر الأخير من ربيع عام لربع قرن من الألفية الثالثة

Afaq Bookshop & Publishing House

1 Kareem El Dawla st. - From Mahmoud Basiuny st. Talaat Harb
CAIRO – EGYPT - Tel: 00202 25778743 - 00202 25779803 Mobile: +202-01111602787
E-mail:afaqbooks@yahoo.com – www.afaqbooks.com

١ شارع كريم الدولة– من شارع محمود بسيوني – ميدان طلعت حرب– القاهرة – جمهورية مصر العربية
ت: ٢٥٧٧٨٧٤٣ ٠٠٢٠٢ - ٢٥٧٧٩٨٠٣ ٠٠٢٠٢ - موبايل: ٠١١١١٦٠٢٧٨٧

ميلو بيكمان

رياضيات بلا أرقام

ترجمة

مصطفى العدوي

آفاق للنشر والتوزيع

هذه ترجمة كتاب:

Math Without Numbers

Illustrations by M Erazo

إلى إريك، لأنكِ شجعتني لأفعلها..

مع الشكر لتايلور للتحقُّق من الرياضيات،

وبورتيا للحوار،

وإم لإحيائها..

مقدمة المترجم..

تمثِّل الرياضيات تحديًا كبيرًا للباحثين في مجال العلوم.. إذ يمثِّل إتقان علم الرياضيات ركيزة أساسية في معظم العلوم الحديثة، كالفيزياء والكيمياء والهندسة والأحياء والطب.

ولقد كنتُ محظوظًا بتقديم هذا العمل الذي تعود طبعته الأولى إلى عام ٢٠٢١.. لتواصل به دار آفاق مشروعها الواعد في تقديم أحدث المؤلفات العلمية إلى القارئ العربي..

وتمثِّل هذه التجربة تحديًا جديدًا، إذ يشكو الكثيرون صعوبة الرياضيات وصعوبة تلقِّيها وصعوبة استيعابها، فنجد في هذا الكتاب حلًّا مجيدًا بأسلوبٍ شيقٍ وبسيطٍ، يصل إلى العمق من علم الرياضيات بأسلوب السهل الممتنع، ولا يغفل النقاش حول فلسفتها.

لذا أجد هذا الكتاب مفيدًا للقارئ العادي والقارئ المتخصص في العلوم، حيث التذكير بالكثير من المفاهيم الأساسية التي قد يسقطها الانشغال بالتقنيات العلمية في خضم الدراسة والبحث.

كما أنه يبدو مفيدًا لتحضير الطلاب في مرحلة ما قبل الثانوية العامة خاصة من يرغب فيهم في التخصص في الرياضيات العلمية أو البرمجة.

فهذا الكتاب يقدِّم شرحًا مهمًّا للمفاهيم الأولية للرياضيات وفيزياء الجسيمات كذلك.

وختامًا لقد رُوعي في هذا الكتاب الاحتفاظ -قدر الإمكان- بالمصطلح اللغوي الأجنبي جنبًا إلى جنب المصطلح العربي حتى يصل المعنى إلى القارئ بغض النظر عن اللغة التي قد يكمل بها الدارس أو الطالب دراسته.

والله من وراء القصد.

مصطفى العدوي

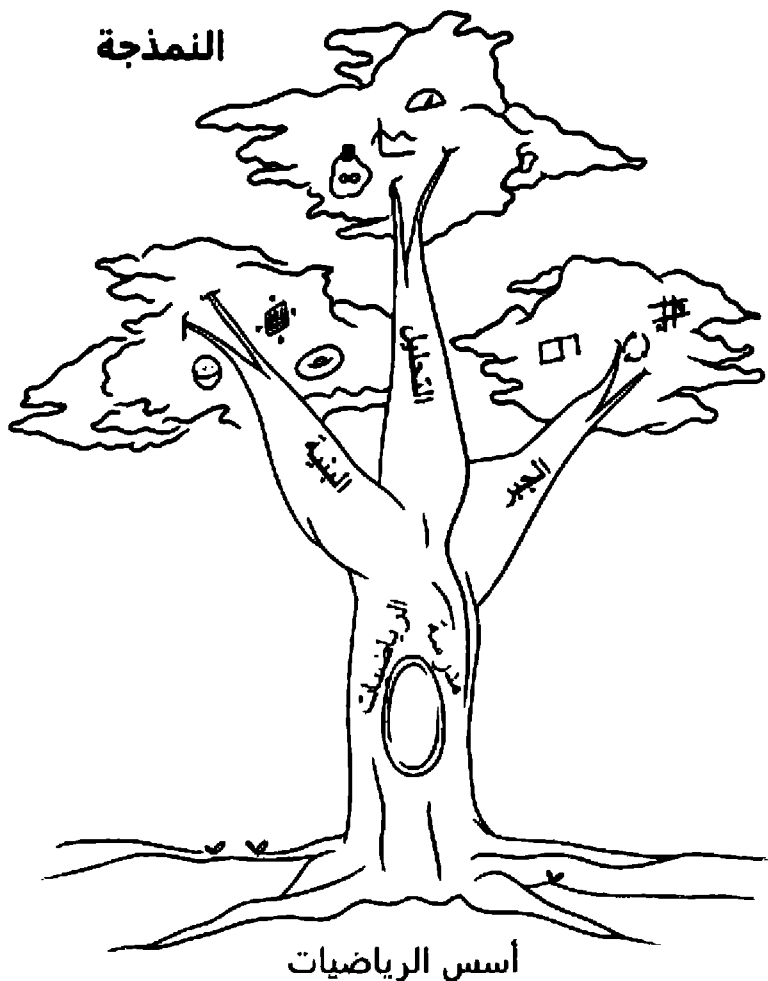
١/ ٧/ ٢٠٢٣

بماذا يؤمن علماء الرياضيات؟

إنهم يؤمنون أن الرياضيات ممتعة وصحيحة ومفيدة (بهذا الترتيب).

إنهم يؤمنون بعملية تُسمَّى «البرهان الرياضي»، لأن المعرفة الناتجة عن الدليل مهمة وقوية.

يعتقد علماء الرياضيات الأكثر تشددًا أن كل شيء -النباتات والحب والموسيقى وكل شيء- يمكن (من الناحية النظرية) فهمه من منظور الرياضيات.



أسس الرياضيات

أسس الرياضيات: foundations: أسس الرياضيات هي دراسة الأسس الفلسفية والمنطقية والخوارزمية للرياضيات، أو بمعنى أشمل هي الدراسة الرياضية للنظريات الفلسفية حول ماهية الرياضيات.

تعني أسس الرياضيات بدراسة المفاهيم الرياضية الأساسية (كالدوال، والمجموعات والأعداد، والأجسام الهندسية وغيرها)، وكيف تكون مركبات ومفاهيم أخرى أكثر تعقيدًا، خصوصًا المفاهيم الجذرية كاللغات الرياضية (الصيغ الصورية، النظريات الرياضية ونماذجها، التعريفات الرياضية، المبرهانات، الخوازميات وغيرها)، إن البحث عن أسسٍ للرياضيات هو أحد الأسئلة الرئيسية جدًّا في فلسفة الرياضيات.

الجبر: Algebra: الكلمة الإنجليزية مشتقة من الجبر في العربية «تجميع الأجزاء المكسورة» أو «ترقيع العظام» وهو أحد المجالات الواسعة للرياضيات. بشكلٍ تقريبي، الجبر هو دراسة الرموز الرياضية وقواعد معالجة هذه الرموز في الصيغ؛ ما يُعَد خيطًا موحدًا لجميع الرياضيات تقريبًا.

التحليل: Analysis : التحليل هو فرعٌ من فروع الرياضيات يتعامل مع الدوال المستمرة، والحدود أو النهايات، والنظريات ذات الصلة، مثل التفاضل والتكامل والقياس والتسلسلات اللا نهائية والسلسلة والدوال التحليلية، عادة ما تُدرس هذه النظريات في سياق الأعداد والوظائف الحقيقية والمركبة. تطور التحليل من حساب التفاضل والتكامل، الذي يتضمن المفاهيم الأساسية وتقنيات التحليل. يمكن تمييز التحليل عن الهندسة؛ ومع ذلك، يمكن تطبيقه على أي مساحة من الأجسام الرياضية التي لها تعريفٌ للقرب أو مسافات محددة بين الأجسام.

البنية أو الطوبولوجيا: topology: في الرياضيات، تهتم البنية أو الطوبولوجيا بخصائص جسم هندسي محفوظ في ظل تشوهات

مستمرة، مثل التمدد، والالتواء، والانحناء، أي من دون إغلاق ثقوب أو فتح ثقوب أو تمزيق الجسم أو لصقه أو المرور من خلاله.

النمذجة: modeling: النموذج الرياضي هو وصفٌ لنظامٍ يستخدم المفاهيم الرياضية واللغة، تسمى عملية تطوير نموذج رياضي بالنمذجة الرياضية. تُستخدم النماذج الرياضية في العلوم الطبيعية (مثل الفيزياء وعلم الأحياء وعلوم الأرض والكيمياء) والتخصصات الهندسية (مثل علوم الكمبيوتر والهندسة الكهربائية)، وكذلك في الأنظمة غير الفيزيائية مثل العلوم الاجتماعية (مثل الاقتصاد، وعلم النفس وعلم الاجتماع والعلوم السياسية). يُعَد استخدام النماذج الرياضية لحل المشكلات في الأعمال أو العمليات العسكرية جزءًا كبيرًا من مجال أبحاث العمليات. تُستخدم النماذج الرياضية أيضًا في الموسيقى، علم اللغة، والفلسفة (على سبيل المثال، بشكلٍ مكثفٍ في الفلسفة التحليلية)، قد يساعد النموذج في شرح النظام ودراسة تأثيرات المكونات المختلفة، وعمل تنبؤات حول سلوكها.

محتويات الكتاب

البنية أو علم الطوبولوجيا- Topology

- الشكل - shape
- متعددات الشعب - Manifolds
- الأبعاد - Dimensions



الشكل - shape(*)

يميل علماء الرياضيات إلى التفكير المفرط في الأشياء. كمثالٍ لِمَا يفعله علماء الرياضيات، يختارون بعض المفاهيم التي يفهمها الجميع على المستوى الأساسي، مثل التناظر symmetry أو التساوي equality، ثم يأخذونها بعيدًا على انفرادٍ في محاولة لإيجاد معنى أعمق لها.

لأي شيء يأخذ شكلًا ما. كلنا نعرف بشكلٍ أو بآخر ما هو الشكل، تنظر إلى جسمٍ ما object ويمكنك بسهولة معرفة إذا كان دائرة أو مستطيلًا أو أي شيء آخر، لكن عالِم رياضيات سيسأل: ما هو الشكل؟

ما الذي يجعل شيئًا ما بالشكل الذي هو عليه؟ عندما تحدد جسمًا من خلال الشكل، فإنك تتجاهل حجمه، ولونه، والغرض من استخدامه،

(*) الشكل **shape**: هو تمثيلٌ بالرسم لكائن أو جسم أو حدوده الخارجية أو مخططه الخارجي أو سطحه الخارجي، على عكس الخصائص الأخرى مثل اللون أو الملمس أو نوع المادة. الشكل ثنائي الأبعاد (2D) ربما يقع على سطح منحنٍ أكثر عمومية (مساحة ثنائية الأبعاد غير إقليدية).

وعمره، ومدى ثقله، ومَن أحضره إلى هنا، ومَن المسؤول عن إعادته إلى المنزل عندما نغادر. ما الذي لا تتجاهله؟ ما الذي يجول بخاطرك عندما تقول أن شيئًا ما على شكل دائرة؟

هذه الأسئلة، بالطبع، لا طائل من ورائها، بالنسبة إلى جميع الاستخدامات العملية، فإن فهمك للـ«شكل» بطريقة حدسية أمرٌ جيدٌ، ذلك أن أي قرار مهم في حياتك لن يتوقف على كيفية تعريف كلمة «الشكل» بشكل دقيق، إنه أمرٌ مثيرٌ للاهتمام أن تفكر فيه فقط إذا كان لديك بعض أوقات الفراغ وترغب في قضائه في التفكير في الأشكال.

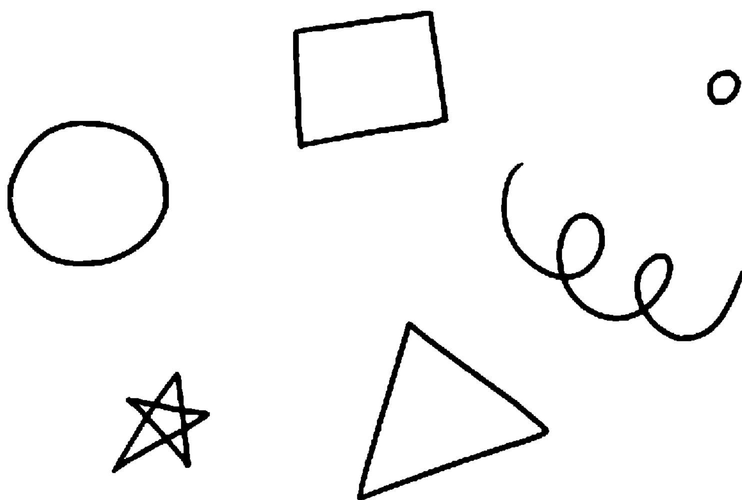
لنفترض أن لديك بالفعل بعض من وقت الفراغ، وستسأل نفسك عن الشكل، إليك سؤالًا نعتقد أنه يجب أن تطرحه على نفسك:

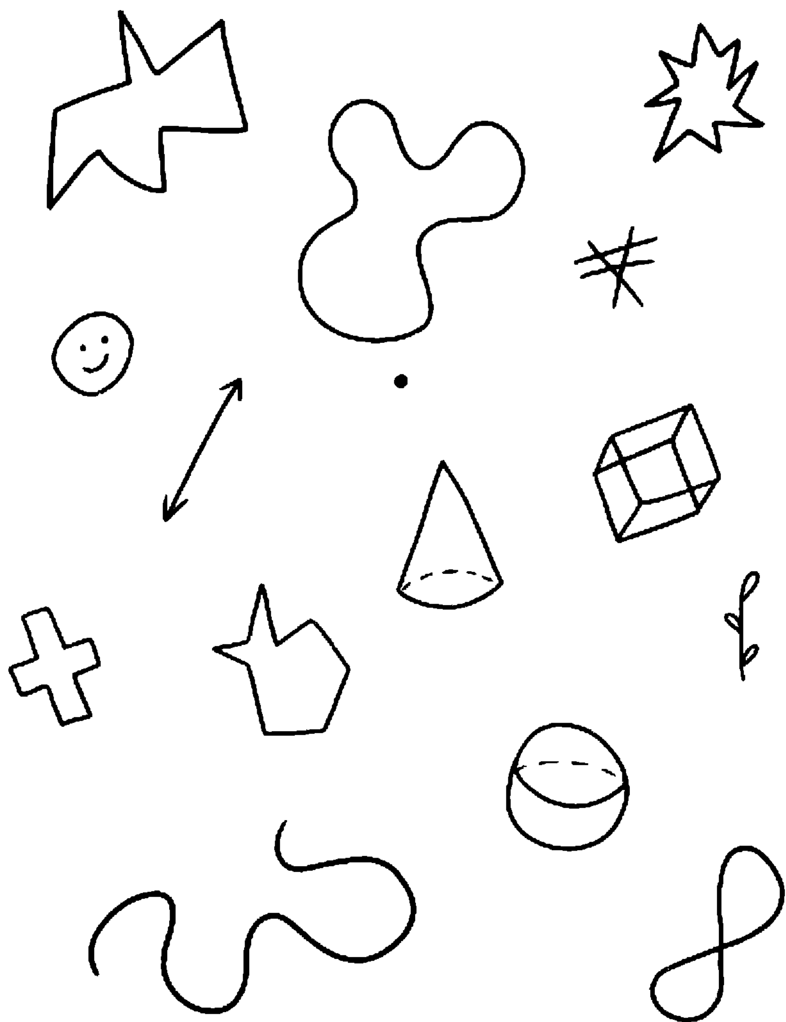
كم عدد الأشكال الموجودة؟

إنه سؤالٌ بسيطٌ للغاية، ولكن ليس من السهل الإجابة عنه. النسخة الأدق والأكثر تحديدًا من هذا السؤال، تُسمَّى حدسية بوانكاريه المعممة generalized Poincaré conjecture، ظلَّت موجودة لمدة تزيد على القرن لم نعرف أي شخص استطاع حلها، لقد حاول الكثيرون، وفاز عالِم رياضيات محترف مؤخرًا بجائزة قدرها مليون دولار لإنهائه جزءًا كبيرًا من المشكلة.

ولكن لا تزال هناك العديد من فئات الأشكال categories of shapes التي تُركت بلا إحصاء، لذلك ما زلنا لا نعرف، كمجتمع عالمي، كم عدد الأشكال الموجودة.

دعونا نحاول الإجابة عن السؤال، كم عدد الأشكال الموجودة؟ لعدم وجود فكرة أفضل، يبدو أنه من المفيد أن تبدأ فقط في رسم الأشكال وسنرى إلى أين ينتهي بنا هذا الأمر.

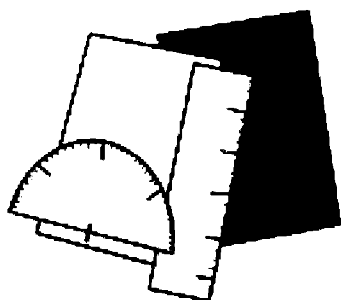


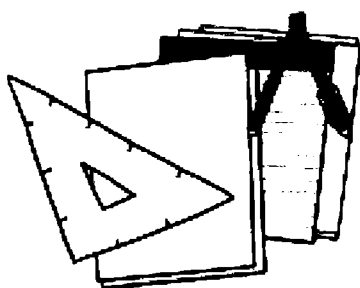


يبدو أن الإجابة عن هذا السؤال ستعتمد على كيفية تقسيم الأشياء بالضبط إلى فئاتٍ من الأشكال المختلفة. هل الدائرة الكبيرة لها نفس شكل الدائرة الصغيرة؟ هل نحسب «التمايل» squiggle كفئة واحدة كبيرة، أم يجب أن نقسمها على أساس الطرق المختلفة التي تتمايل بها

الأشياء؟ نحتاج إلى قاعدة عامة لتسوية نقاشات كهذه، لذا فإن سؤال «كم عدد الأشكال» لا يمكن أن نحصره فقط بالطريقة التي نحكم بها على أساس كل حالة على حدة.

هناك العديد من القواعد التي يمكن أن نختارها من شأنها أن تساعدنا في تحديد ما إذا كان الشكلان متماثلين أو مختلفين. إذا كنتَ نجارًا أو مهندسًا، فستحتاج إلى قاعدة صارمة ودقيقة للغاية، تلك التي تسمي شكلين متماثلين، فقط إذا كان جميع أطوالهما، وزواياهما، ومنحنياتهما متطابقة تمامًا. تؤدي هذه القاعدة إلى نوع من الرياضيات يُسمَّى الهندسة geometry، حيث تكون الأشكال صلبة ودقيقة، ويمكنك الآن القيام بأشياء عديدة مثل رسم خطوط متعامدة وحساب المساحات.



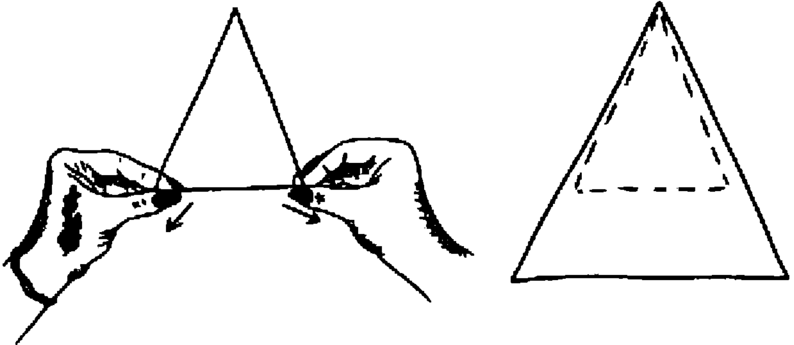


نريد شيئًا أكثر مرونة. نحاول العثور على كل الأشكال الممكنة، وليس لدينا الوقت لفرز الآلاف من الأشكال المختلفة التي يمكن رسمها بخطوطٍ متمايلة. نريد قاعدة ثرية يمكن من خلالها الحكم باعتبار شيئين لهما نفس الشكل، والتي في إمكانها تقسيم عالم الأشكال إلى عددٍ معتبر من الفئات الرئيسية.

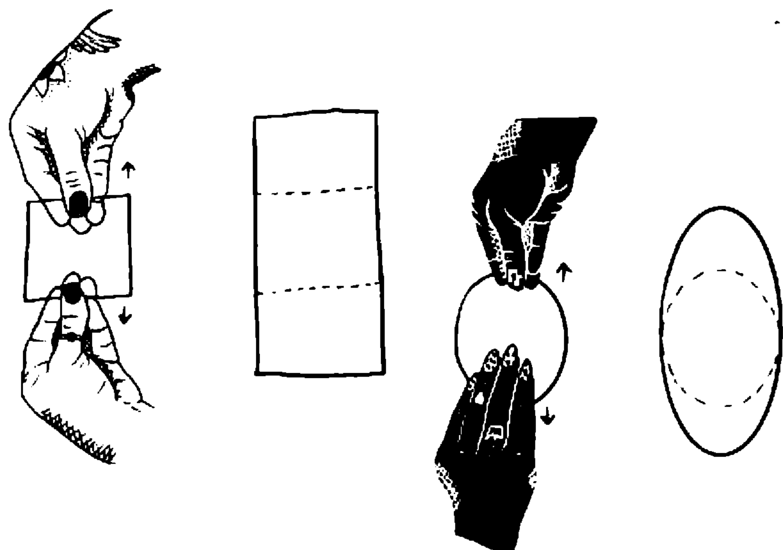
قاعدة جديدة

يمكن اعتبار أي شكلين متشابهين إذا كان بإمكاننا تحويل أحدهما إلى الآخر عن طريق المط *stretching* أو الانكماش/ الضغط *squeezing*، ولكن من دون أي تقطيع/ تمزيق *ripping* أو لصق *gluing*.

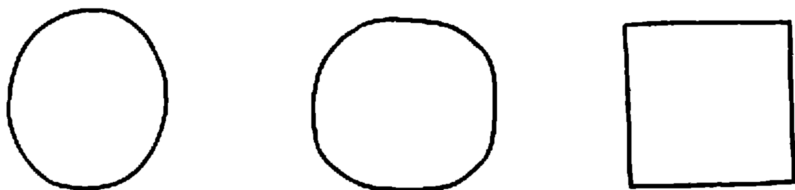
هذه القاعدة هي الفكرة المركزية للطوبولوجيا، التي تشبه نسخة أكثر مرونة من الهندسة. في الطوبولوجيا، تصنع الأشكال من مادة رفيعة قابلة للتمدد إلى ما لا نهاية، يمكنك لفها وسحبها ومعالجتها مثل العلكة أو العجين، في الطوبولوجيا، حجم الشكل ليس أمرًا مهمًّا.



كذلك، فيمكن اعتبار المستطيل مربعًا، والدائرة كشكلٍ بيضاوي.



الآن سيصبح الموضوع غريبًا. إذا فكرنا في استخدام قاعدة «التمدد والضغط» هذه، فإن الدائرة والمربع يعتبران نفس الشكل!



قبل أن تذهب لتخبر أحباءك أنك قرأت كتابًا عن الرياضيات وتعلَّمتَ أن المربع عبارة عن دائرة، ضِع في اعتبارك: إن السياق مهمٌّ. المربع هو دائرة في الطوبولوجيا. من المؤكد أن المربع ليس دائرة في الفن أو الهندسة المعمارية، أو في المحادثة اليومية، أو حتى في الهندسة، وإذا حاولت ركوب دراجة بإطاراتٍ مربعة فلن تقطع مسافة كبيرة.

لكننا الآن نتعامل مع الطوبولوجيا، وفي أثناء قيامنا بالطوبولوجيا، لا نهتم بالتفاصيل الصغيرة التافهة مثل الزوايا المدببة التي يمكن توسيعها كثيرًا. نتجاوز الاختلافات السطحية، أشياء مثل الأطوال والزوايا، الحواف المستقيمة مقابل الحواف المنحنية أو المتعرجة. نحن نركز فقط على لبِّ الموضوع، الشكل الأساسي: الميزات الأساسية التي تجعل شكلًا ما هو الشكل الذي عليه الآن. عندما ينظر علماء الطوبولوجيا إلى مربع أو دائرة، فإن كل ما يرونه هو حلقة أو مسار مغلق، الآن، كل شيء آخر هو مجرد سمة من سمات كيفية تمدده وضغطه.

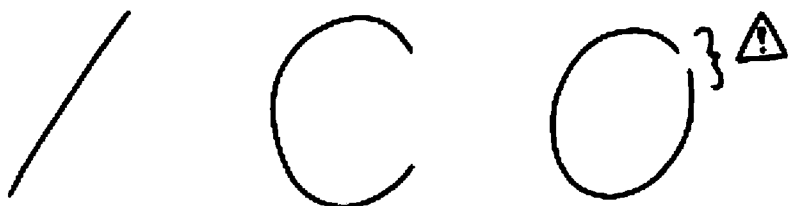
إن هذا الأمر يشبه السؤال، «ما هو شكل العقد؟» إنه مربع إذا حملته بطريقة ما، ويأخذ شكل دائرة إذا حملته بطريقة أخرى. ولكن بغض النظر عن كيفية تغييره، فهناك شكل جوهري له، شيء أساسي لا يتغير، سواء كان مربعًا، أو دائرة، أو مثمنًا، أو قلبًا، أو هلالًا، أو نقطة، أو سداسي سباعي عشاري الشكل.



نظرًا إلى أن هذا الشكل يأتي بأشكالٍ مختلفة، فليس من الصواب تسميته إما دائرة وإما مربعًا، نسميها أحيانًا دائرة على أي حال، ولكن الاسم الرسمي لهذا الشكل في علم الطوبولوجيا هو شكل حرف S «S-one».

«S-one» هو شكل عقد أو سوار أو شريط مطاطي، أو مضمار سباق أو حلبة، أو أي خندق أو حدود وطنية، وهو شكل الحرف O والحرف D الكبير، أو أي حلقة مغلقة لأي شكل. تمامًا كما أن المربع هو نوع خاص من المستطيل، والدائرة هي نوع خاص من الشكل البيضاوي، كل هذه الأشكال هي أنواع خاصة من شكل حرف S: S-one.

هل هناك أشكال أخرى؟ سيكون من العار أن تصبح قاعدة التمدد والضغط فضفاضة جدًّا إلى درجة أنها وبطريق الخطأ ستدمر كل التنوع في الأشكال إلى فئة واحدة واسعة، لدينا خبرٌ جيدٌ: لا تزال هناك أشكالٌ ليست مثل الدائرة.



مثلًا الخط:

يمكن ثني الخط ليكون دائريًّا تقريبًا، ولكن لإنهاء المهمة، سنحتاج إلى ربط طرفيه معًا، وهذا غير مسموح به. بغض النظر عن كيفية تعاملك

مع الخط، سيكون لديك دائمًا هاتان النقطتان الخاصتان على كلا الطرفين، حيث ينتهي الشكل. لا يمكنك التخلص من نقاط النهاية، يمكنك تحريكهما وتمديد أحدهما بعيدًا عن الآخر، لكن نقطتي النهاية هما سمة غير متغيرة للشكل.

لسببٍ مشابه، الشكل ثمانية 8 هو شكل مختلف أيضًا.

لا توجد أي نقاط نهاية، ولكن لا تزال هناك نقطة خاصة في المنتصف حيث تتقاطع الخطوط، عند نقطة التقاطع توجد أربع أذرعٍ ممتدة بدلًا من الاثنتين المعتادتين عند أي نقطة أخرى، تمدد واضغط كل ما تريد، لا يمكنك التخلص من نقطة التقاطع أيضًا.



إذا فكرت في الأمر، فهذه معلومات كافية لنا للإجابة عن السؤال الأصلي «كم عدد الأشكال الموجودة؟»، الجواب هو ما لا نهاية، وإليك الإثبات.

إثبات

انظر إلى هذه العائلة من الأشكال، يمكنك إنشاء كل شكل جديد عن طريق إضافة علامة شرطة إضافية إلى الشكل السابق.

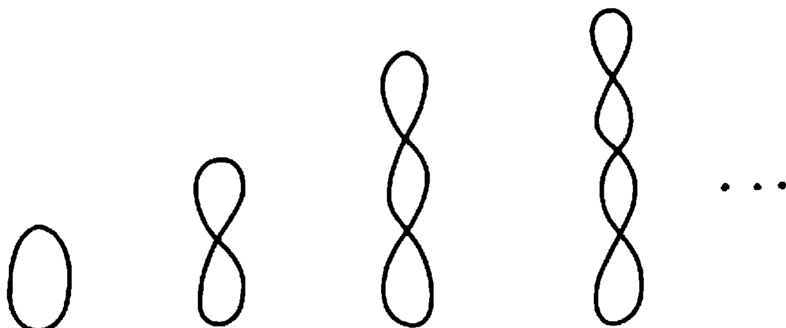
يحتوي كل شكلٍ جديدٍ على نقاط تقاطع ونقاط نهاية أكثر من كل ما قبله، لذلك يجب أن يكون كل شكلٍ جديدًا ومختلفًا تمامًا. إذا واصلتَ القيام بذلك إلى الأبد، فستحصل على عائلة لا حصر لها من الأشكال المختلفة، وبالتالي هناك أشكالٌ لا متناهية.

وهو المطلوب إثباته.

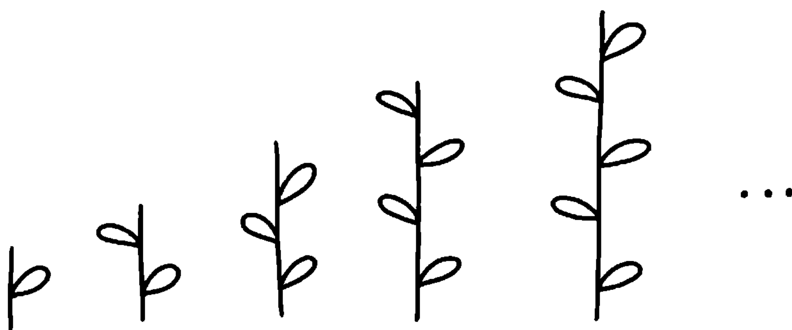
هل اقتنعت؟ كل ما عليك هو العثور على أي مجموعة لا نهائية من الأشكال المختلفة مثل هذه، حيث يكون من الواضح كيفية الاستمرار في صنع أشكال مختلفة جديدة إلى الأبد.

هذه الأشكال ستعطيك دليلًا جيدًا أيضًا:

أو هذه الأشكال:



هذه أيضًا تؤدي إلى نفس النتيجة:

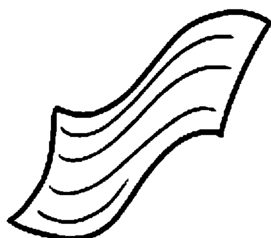


ومع ذلك، مهما أثبت ذلك، فسيظل البرهان الأساسي هو نفسه. تريد أن تُظهر أن هناك عددًا لا نهائيًّا من الأشياء، لذلك ستصف عملية منهجية تستمر في إنتاج أمثلة مختلفة جديدة لهذا الشيء. وهذا ما يسمى برهان «العائلة اللا نهائية infinite family»، وهي أداة شائعة جدًّا في الرياضيات عندما تريد إظهار وجود ما لا نهاية لشيء ما. أجده مقنعًا – لا أرى كيفية المجادلة ضده. يجب أن يكون هناك ما لا نهاية لشيء ما إذا كان في إمكانك الاستمرار في صنع المزيد منه إلى الأبد.

هذا الأمر ليس خاص بي بمفردي.. إذ يعتبر مجتمع الرياضيات ككل أن برهان «الأسرة اللا نهائية» دليلٌ رياضي صالح. هناك مجموعة من تقنيات الإثبات مثلها، حيث يمكن استخدام نفس النوع من الحجة في سياقات مختلفة لإثبات أشياء مختلفة. يبدأ الأشخاص الذين يتعاملون مع الرياضيات بشكلٍ مكثفٍ في ملاحظة نفس أنماط البرهان التي تظهر مرارًا وتكرارًا، نتفق جميعًا (في الغالب) على طرق إثبات صحة الأشياء.

إذا قبلت هذا الإثبات، فقد أجبنا الآن عن السؤال الأصلي «كم عدد الأشكال الموجودة؟». الجواب هو اللا نهاية. إنها ليست إجابة شيقة بشكلٍ خاصٍّ، ولكن هذه هي الإجابة التي نحصل عليها، بمجرد طرح السؤال وتحديد قواعد الاشتباك، تتحدد الإجابة بالفعل، علينا فقط البحث عنها.

السؤال الأول الذي تعتقد أنه يجب طرحه لا يقودك دائمًا إلى الإجابة الأكثر إثارة للاهتمام أو الإجابة الأكثر براعة، عندما يحدث ذلك، يمكنك الاستسلام والعثور على شيء آخر لتفكر به، أو يمكنك طرح سؤال أفضل.



متعددات الشعب - Manifolds (*)

هناك عددٌ كبيرٌ جدًّا من الأشكال لتتبُّعها ودراستها، لذلك يركز علماء الطوبولوجيا على الأشكال المهمة فقط. **متعددات الشعب**. إنها تبدو معقدة لكنها ليست كذلك في الحقيقة، فأنت تعيش في الواقع على **متعدد الشعب**. الدوائر والخطوط والأسطح المستوية والكرات: **متعددات الشعب** هي الأشكال السلسة والبسيطة والموحدة التي يبدو أنها تلعب دائمًا دورًا رائدًا عندما نتعامل مع الفراغ المادي في الرياضيات والعلوم.

إنها بسيطة للغاية، وقد تعتقد أننا وجدناها كلها الآن. في الحقيقة لم نفعل! يشعر علماء الطوبولوجيا بالحرج الشديد حيال هذا الأمر، لقد خصصوا مكافأة قدرها مليون دولار لتشجيع الناس على النظر بجدية أكبر.

هذا هو السؤال الأكبر الذي لم يُحَل في الطوبولوجيا، وهو مُسلٍّ

(*) Manifolds في الرياضيات، متعدد الشعب أو الشتيتة هو فضاء طوبولوجي يشبه الفضاء الإقليدي حول كل نقطة، بشكلٍ أدق، لكل نقطة من متعدد شعب له عدد (n) من الأبعاد تشابه في الشكل البلوري للفضاء الإقليدي الذي له عدد (n) من الأبعاد.

ومحبط للخبراء في هذا المجال لأكثر من قرن:

كم عدد متعددات الشعب الموجودة؟

أو بشكل أكثر دقة:

ما هي متعددات الشعب الموجودة؟

الهدف ليس عدَّهم بالمعنى الحرفي، ولكن المعنى هو إيجادهم جميعًا، وتسميتهم وتصنيفهم إلى أنواعٍ مختلفة، نحن بصدد تجميع دليل ميداني لكل **متعددات الشعب** الممكنة.

إذن ما هو بالضبط **متعدد الشعب**؟ قاعدة تحديد **متعددات الشعب** صارمة جدًّا، ومعظم الأشكال لا تصمد في التصنيف حتى يمكن وصفها **بـمتعددات الشعب**.

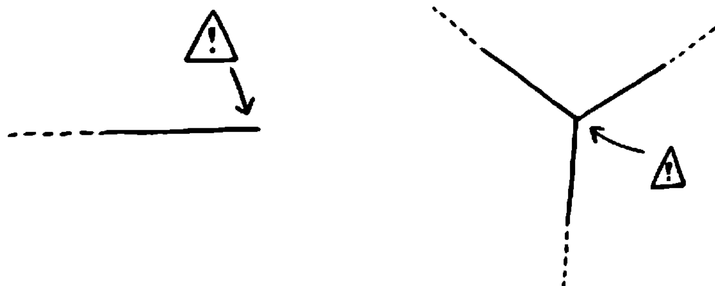
قاعدة جديدة

يُسمَّى الشكل «متعدد الشعب» إذا لم يكن لديه نقاط خاصة

أي:

لا توجد نقاط نهاية، ولا نقاط تقاطع، ولا نقاط حواف، ولا نقاط تفرع.

يجب أن تكون هي نفسها في كل مكان.

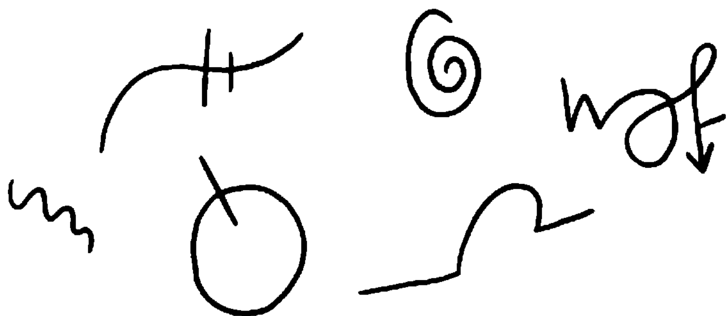


هذا يستبعد على الفور كل المجموعات اللا نهائية من الأشكال التي ذكرناها في الفصل السابق. أي شيء به علامات التظليل أو النجمة أو أي شيء من هذا القبيل لن يتم احتسابه **كمتعدد شعب**. هذا يعني أن السؤال «كم» قد يكون له إجابة فعلية الآن: قد يكون هناك عددٌ محددٌ ومحدودٌ من **متعددات الشعب**، لنرى.

لا يقتصر هذا التعريف أيضًا على الأشكال المسطحة ذات النمط السلكي wireframe-style مثل تلك التي كنا نتعامل معها. يمكن أن يكون لديك **متعددات الشعب** المصنوعة من مادة تشبه الصحيفة sheetlike أو من مادة تشبه العجين material doughlike. من المحتمل أن يكون الكون الذي نعيش فيه **متعدد شعب** ثلاثي الأبعاد، إلا إذا كنت تعتقد أن هناك حدودًا فيزيائية يتوقف عندها الكون، أو يتقاطع مع نفسه بطريقة ما.

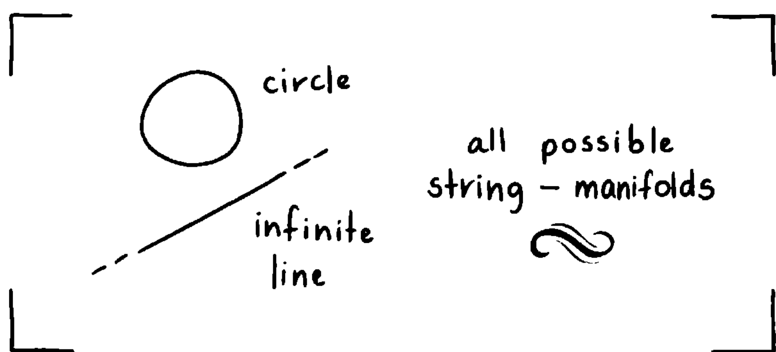
ولكن دعنا نتوقف عند الأشكال ذات النمط السلكي في الوقت الحالي، النوع الذي يمكنك صنعه من الخيط أو مشابك الورق. في علم الطوبولوجيا، نسمي هذه الأشكال أحادية البُعد، على الرغم من أن الصفحة التي تقع فوقها هذه الأشكال : ثنائية الأبعاد. فإن ما يهم هو مادة الشكل.

إذن، ما هي متعددات الشعب التي يمكنك صنعها من الخيط؟ ليس لدينا الكثير من الخيارات؛ تحتوي معظم أشكال الخيوط التي يمكنك التوصل إليها على نقاط خاصة.

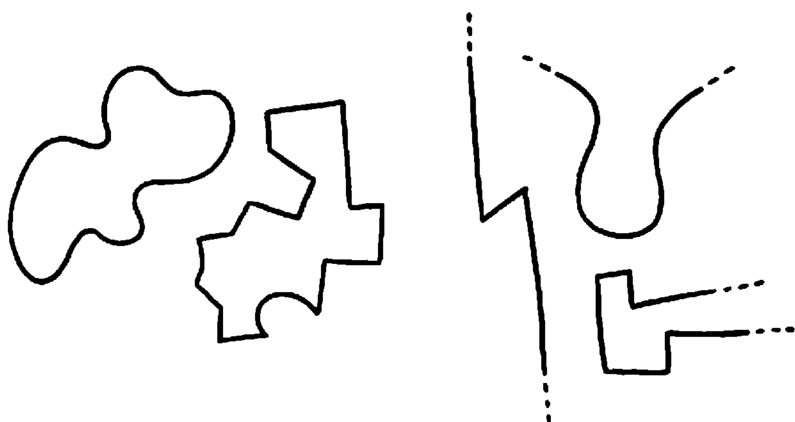


الالتواءات والتعرجات والزوايا مقبولة، حيث يمكن صقلها. المشكلة الحقيقية هي نقاط النهاية؛ كيف يمكن إزالة نقاط النهاية؟

لا يوجد سوى نوعين من متعددات الشعب الخيطية، إذا كنت لا تعرف ما هي، يمكنك أن تأخذ ثانية الآن للتحديق إلى الفضاء والتفكير في الأمر قبل الانتقال إلى الفقرة التالية.



الدائرة (المعروفة أيضًا باسم شكل الحرف S) والخط اللانهائي (المسمى شكل الحرف R) هما **متعددات الشعب** الوحيدان في البعد الأول. لتجنب نقاط النهاية، عليك إما العودة إلى نقطة البداية (الدائرة)، وإما الاستمرار والمضي قدمًا إلى الأبد، ولا تنسَ: نظرًا إلى أن جميع الأشكال في علم الطوبولوجيا قابلة للتمدد، فإن هذا يمتد ليشمل أيضًا أي شكل على هيئة حلقة مغلقة وأي شكلٍ يستمر إلى الأبد، لا يجب أن يكون دائرة أو خطًّا مستقيمًا بالمعنى الحرفي للكلمة.

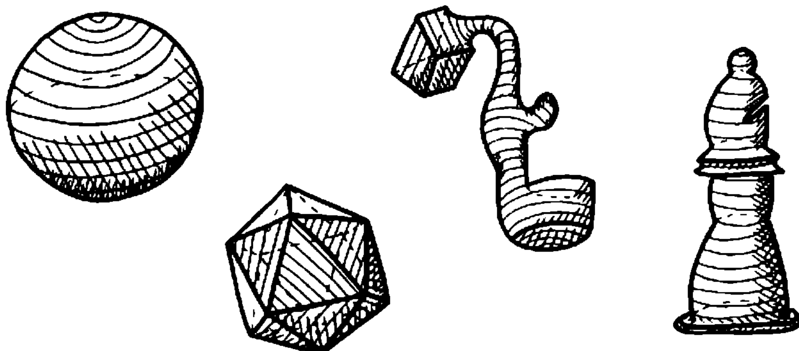


هذا كل شيء بالنسبة إلى البعد الأول، ليس سيئًا! يمكنك أن ترى أننا قمنا بتضييق نطاق البحث كثيرًا. السؤال الأصلي كان «كم عدد الأشكال؟» وهو سؤالٌ واسع النطاق تمامًا، لكن هذا السؤال يبدو طيعًا، على الأقل حتى الآن، هل أنت مستعدٌّ للصعود إلى أبعاد أخرى؟

في البُعد الثاني، نبحث عن **متعددات الشعب** المصنوعة من مادة أشبه بالصحيفة، تذكر أن المهم هي المواد! معظم هذه الأشكال هي

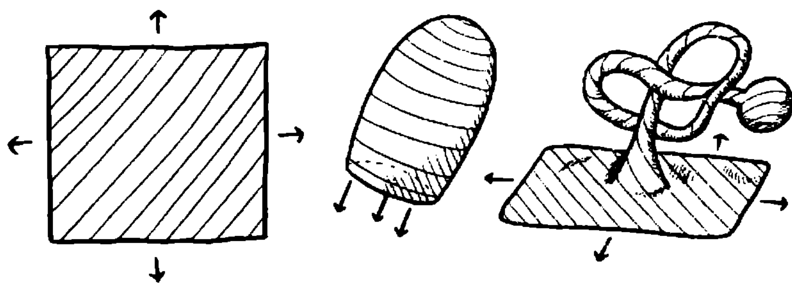
ما نعتبره عادةً ثلاثية الأبعاد، لكنها مصنوعة من مادة ثنائية الأبعاد، وهذا هو المهم.

إذن: ما هي **متعددات الشعب** التي يمكن صنعها من مادة تشبه الصحيفة؟ نحن نبحث عن شيء يشبه الصحيفة أو الورقة في كل مكان، من دون حوافٍ أو منحدرات حيث يمكن للصحيفة أن تتوقف. تذكر كيف قلت إنك تعيش على **متعدد الشعب**؟ سطح الأرض عبارة عن كرة، وهي عبارة عن **متعدد الشعب** ثنائية الأبعاد.



مع التمدد والضغط، تشتمل «الكرة المجوفة أو الدائرة ثلاثية الأبعاد sphere» على أي سطحٍ مغلقٍ: مكعب، مخروط، أسطوانة، وكل ما على شاكلتها. لكن كُن حذرًا مع المصطلحات! في الرياضيات، يشير مصطلح «الكرة المجوفة sphere» فقط إلى شكل السطح المجوف، بينما يتم ملء «الكرة المصمتة ball». الكرة المصمتة ثلاثية الأبعاد (مصنوعة من مادة العجين)، لذلك دعونا نتجاوز هذه المسألة في الوقت الحالي.

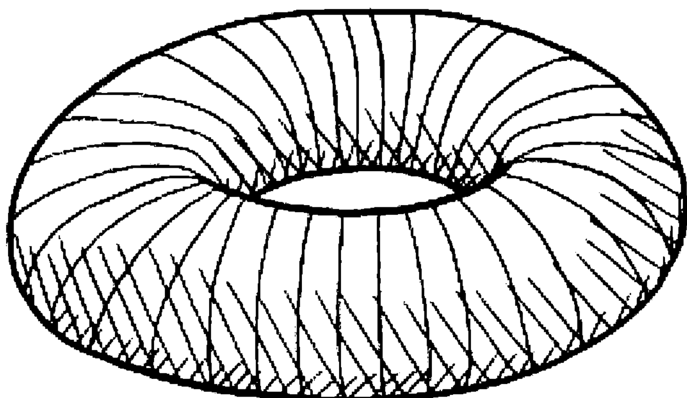
يُطلق على شكل الكرة المجوفة بشكلٍ عامٍّ هذا الاسم S-two (حرف S في بعدين)، وهو أمر منطقي لأنه يشبه النسخة المسطحة للدائرة التي هي شكل S-one، أو حرف S في بُعدٍ واحدٍ. يمكننا استخدام نفس الإستراتيجية لإيجاد **متعدد الشعب** على شكل صحيفة التالي، المكافئ لخط لا نهائي، في بُعدٍ واحدٍ أعلى: أي مستوى لا نهائي.



هذه الأشكال تُسمَّى شكل حرف R في بُعدين، ويتضمن أي سطح لا نهائي يقسم الفراغ إلى منطقتين لا متناهيتين.

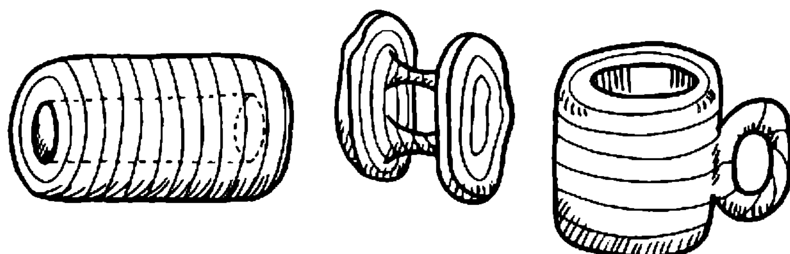
هل تعلم كيف يعتقد بعض الناس أن الأرض مسطحة؟ هذا منطقي من الناحية الطوبولوجية. لا يحتوي **متعدد الشعب** على نقاط خاصة، لذلك تبدو كل نقطة متطابقة مع كل نقطة أخرى، لو أنك تشاهد الأرض من منظور سيرك/ تمشيتك في الشارع. قد يكون هناك بعض الانحناء، ولكن إذا كنت ضئيلًا بما يكفي فلن تلاحظ ذلك. إذا كنت تعيش على أي **متعدد شعب** ذي شكل الصحيفة، فسيبدو (محليًّا) كما لو كنت تعيش على سطح مسطح.

وهناك المزيد من **متعددات الشعب** على شكل صحيفة أكثر من هذين النوعين فقط، المزيد من الأبعاد يعني المزيد من حرية الحركة. هناك **متعددات شعب** جديدة يمكنك بناؤها بمواد ثنائية الأبعاد، ليس لها شكل خيطي مكافئ.



الدونات المجوفة من **متعددات الشعب**، يمكنك معرفة أنه **متعدد شعب** جديد بسبب الثقب الموجود في المنتصف، بغض النظر عن كيفية تمديدك أو ضغطك له، لا يمكنك التخلص منها. لكنه نوعٌ من الثقوب المثيرة للفضول: لا توجد حافة صلبة له. ليس الأمر كما لو كنت تقطع ثقبًا في قطعة من الورق، تاركًا حافة من النقاط الخاصة، ثقب الدونات هذا أرق من ذلك، يمكنك فقط رؤيته من الخارج. إذا كنت تعيش على سطح كوكب على شكل كعكة الدونات الدائرية، فلن تلاحظ أبدًا من خلال النظر حولك وجود ثقب. سيبدو، محليًّا (أي على مستوى رؤيتك)، تمامًا كما لو كنت تعيش على كرة أو طائرة مسطحة.

يُسمَّى **متعدد الشعب** الجديد هذا بالنتوء المستدير torus (أو الطارة)، أو شكل حرف T في بعدين T-two، وهو يتضمن أي شيء به هذا النوع من التجاويف الملساء.



ما زلنا لم ننتهِ من متعددات الشعب على شكل صحيفة، يمكنك أيضًا عمل نتوء مستدير (طارة) مزدوجة:



مما يعني بالطبع أنه يمكنك صنع طارة ثلاثية، وطارة رباعية، وما إلى ذلك، هناك عائلة لا حصر لها من الطارات tori.



حسنًا، لا يوجد عددٌ محددٌ ومحدودٌ من **متعددات الشعب**، هذا جيدٌ، لسنا في حاجة إلى عدِّ **متعددات الشعب** حرفيًّا للعثور عليها جميعًا، ما نقوم به هو تصنيف **متعددات الشعب**. نحن نبحث عن قائمة بكل **متعددات الشعب** الممكنة، ولا بأس إذا كانت هذه القائمة تحتوي على بعض العائلات اللا نهائية. في الكثير من الأحيان في الرياضيات المجردة، تتحوَّل الأشياء إلى ما لا نهاية، لذلك هذا هو أفضل ما يمكنك القيام به.

صدِّق أو لا تصدق، ما زلنا لم ننتهِ من التعامل مع ثنائي الأبعاد، لا يزال هناك المزيد الذي يمكنك بناؤه باستخدام مادة الصحيفة.

لدينا مشكلة صغيرة هنا، **متعدد الشعب** على شكل صحيفة التالي الذي أريد إخبارك عنه غريبٌ جدًّا، سأخبرك اسمه: إنه «المستوى الإسقاطي الحقيقي real projective plane»، لكن لا يمكنني أن أريكم كيف يبدو،

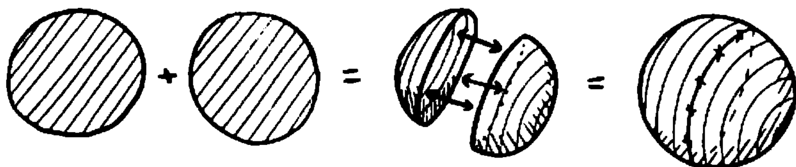
لأنني في الحقيقة لا أعرف كيف يبدو، في الحقيقة لا أحد يعرف كيف يبدو، لأنه غير موجود في كوننا ولا يمكن أن يكون موجودًا أبدًا.

وإليك السبب: يجب أن يتواجد في أربعة أبعاد على الأقل.

بغض النظر عن المادة، كل شكل له حدٌّ أدنى من الأبعاد يمكنه أن يتواجد فيه بالفعل؛ يمكن للمستوي plane أن يتلاءم أو يتواجد في بعدين. الكرة المفرغة تحتاج إلى ثلاثة أبعاد، بينما يحتاج «المستوى الإسقاطي الحقيقي» إلى أربعة.

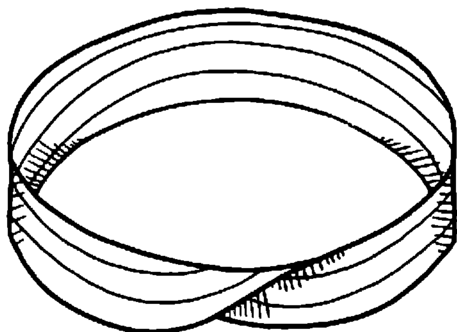
السؤال هو: كيف نعرف أنه موجود؟ حسنًا، دعني أشرحها لك.

تخيل أن لديك قرصًا، وهو عبارة عن دائرة مصمتة، القرص مصنوع من مادة الصحيفة، لكنه ليس **متعدد شعب** بسبب كل النقاط حول الحافة. ولكن إذا كان لديك قرصان، فيمكنك ربطهما معًا بعناية على طول حوافهما حتى يصبحا شكلًا واحدًا من دون أي حوافٍ على الإطلاق، يصبحان **متعدد شعب**.

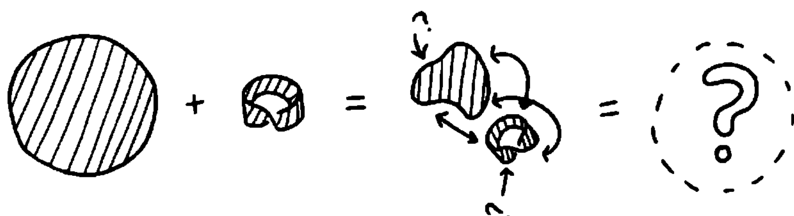


في هذه الحالة، **متعدد الشعب** هذا عبارة عن كرة مجوفة، وهذا ليس مفيدًا جدًّا لأننا نعرف بالفعل ما هي الكرة المجوفة، لكن هذه الفكرة الأساسية مفيدة للغاية: يمكنك أن تأخذ اثنين مما يمكن وصفه بشبيه **متعدد الشعب**، تقريبًا بنفس الحدود، وربطهما معًا للحصول على **متعدد شعب** حقيقي.

تخيل الآن أن لديك شريطًا رقيقًا من مادة الصحيفة مع التواء واحد فيه. قد يبدو هذا الشكل كأن له حدَّين، لكنَّ له حدًّا واحدًا فقط، بسبب الالتواء. اتبع الحافة بإصبعك وسترى أنها تدور على طول الطريق حول الجزء العلوي والسفلي والعودة إلى حيث بدأت.



إليك الخطة، تتشكَّل حدود القرص disk على شكل الحرف s في بعدٍ واحدٍ (دائرة)، حدود هذا الشريط الملتوي على شكل الحرف s في بعدٍ واحدٍ، دعونا نجمعهم معًا لبناء **متعدد شعب** جديد.



إذا حاولت تخيل هذا في رأسك أو محاكاته بيديك، فستواجهك مشكلات بسرعة كبيرة، يجب أن يلتفَّ القرص ويمر من خلال نفسه، وهو أمر غير مسموح بــه (لا توجد نقاط خاصة)، ولكن إذا كنت تنفذ التجربة من خلال أربعة أبعاد، فلن تواجهك مشكلة.

كيف ذلك؟ تخيل الرقم ثمانية 8، يتقاطع مع نفسه إذا قمت برسمه على قطعة من الورق، ولكن إذا كان في إمكانك رفع أحد الخطوط المتقاطعة إلى البعد الثالث، خارج الصفحة، فلن يتقاطع مع نفسه. تخيل الأمر ذاته ولكن في بُعدٍ إضافي أعلى. **متعدد شعب** الغريب الملتوي الذي صنعناه للتوِّ يتقاطع مع نفسه عندما نكون عالقين في ثلاثة أبعاد، ولكن إذا كان في إمكانك «رفعه» من خلال البُعد الرابع، فستحصل على **متعدد شعب** صحائفي جميل وسلس وغير متقاطع.

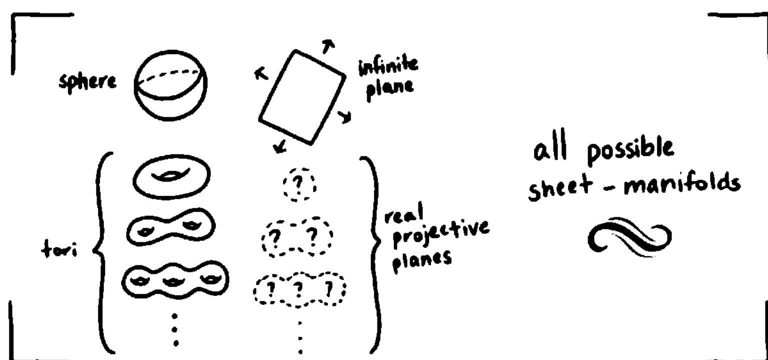
إنه أمرٌ غريبٌ، هذا هو مستوى الإسقاط الحقيقي real projective plane، أو RP-2 للاختصار، وهو فريدٌ ومربكٌ من ناحيتين. يحتوي كل من الكرة المجوفة والطارة على جزء داخلي وخارجي، لكن مستوى الإسقاط الحقيقي له جانب واحد يلتوي إلى الداخل والخارج. إذا قمتَ بكتابة الحرف R على كرة أو طارة، وقمت بتحريكه عبر الفضاء، فسوف يعود دائمًا ليبدو كأنه حرف R، ولكن إذا حركت حرف R على مستوى إسقاط حقيقي، فيمكن أن يعود كأنه Я .

إنه **متعدد شعب**، ويتناسب مع جميع قواعدنا، لذلك يتعين علينا إضافته إلى القائمة. هناك الكرة المجوفة والسطح المستوي وكل الطارات ومستوى الإسقاط الحقيقي، أليس كذلك؟

الحقيقة هي أن الإجابة لا تزال: لا. مستوى الإسقاط الحقيقي يأتي ضمن عائلته اللا محدودة من المساحات الملتوية التي لا يمكن تخيلها. تمامًا كما يمكنك سحق اثنتين من الطارات معًا للحصول على طارة مزدوجة، يمكنك تحطيم مستويين إسقاطيين حقيقيين معًا للحصول

على **متعدد شعب** جديد يسمى زجاجة كلاين Klein bottle، التي تحتاج أيضًا إلى أربعة أبعاد لتتواجد من دون أن تتقاطع مع نفسها. أو يمكنك سحق ثلاثة منهم معًا، أو أربعة، وبذلك تحصل على عائلة لا نهائية كاملة من هذه المساحات الفردية الملتوية.

وهذه، أخيرًا، القائمة الكاملة لجميع **متعددات الشعب** على شكل صحيفة الممكنة[١].



حسنًا، هل أنت مستعد للانتقال إلى بُعدٍ آخر؟

لا ؟، ولا أنا في الحقيقة.

البُعد التالي هو الفتحات المصنوعة من مادة تشبه العجين، وحتى أبسطها من المستحيل تخيلها. مثل الكرة المجوفة متعددة الأبعاد، وحرف S في ثلاثة أبعاد، التي يصبح المقاطع العرضية لها هي كرات مجوفة أيضًا، لذا دعونا لا ننتقل إلى بُعدٍ آخر.

يمكنك أن ترى كيف يمكن أن ينتهي الأمر بتصنيف جميع **متعددات**

الشعب على أنها واحدة من أصعب مسائل الرياضيات التي لم تُحل على الإطلاق. الشيء المدهش هو مدى ضآلة معرفتنا. ليس الأمر كما لو أننا وصلنا إلى البُعد العاشر وعلقنا، ولا حتى قريبين منه، خارج البعدين اللذين نظرنا إليهما للتوِّ، توجد علامات استفهام في كل مكان.

البُعد الثالث، **متعددات الشعب** المصنوعة من العجين، مفهوم بشكل جيد في هذه النقطة، على الرغم من أن الأمر استغرق مئة عام وجائزة مليون دولار للوصول إلى ذلك، وما زلنا لا نملك تصنيفًا أنيقًا وواضحًا تمامًا كما نتعامل مع الأبعاد الأقل عددًا. في الأبعاد الخامسة وما فوق، يستخدم علماء الطوبولوجيا مجموعة من التقنيات تُسمَّى «نظرية الجراحة Surgery theory» للعمل على **متعددات الشعب** وبناء أخرى جديدة.

هذا فقط ما يتعدى البعد الرابع.

أتمنى أن أقول لكم ما الذي يحدث في البعد الرابع، لستُ متأكدًا من وجود أي شخص يعرف حقيقة الأمر. إنها حالة ذات حدود غريبة: أبعاد كثيرة جدًّا بحيث لا يمكن القيام بها بصريًّا، لكنها ليست كافية لاستخدام أدوات جراحية متطورة. هناك مراجع علمية كاملة مخصَّصة للقليل الذي نعرفه عن **متعددات الشعب** في الأبعاد الأربعة، ولم أستطع فهم أي شيء يتجاوز الصفحات الافتتاحية. أخبرتني عالِمة طوبولوجيا محترِفة ذات مرة أنها تريد دراسة **متعددات الشعب** في أربعة أبعاد كطالبة جامعية لكنها نُصِحَت بالابتعاد.

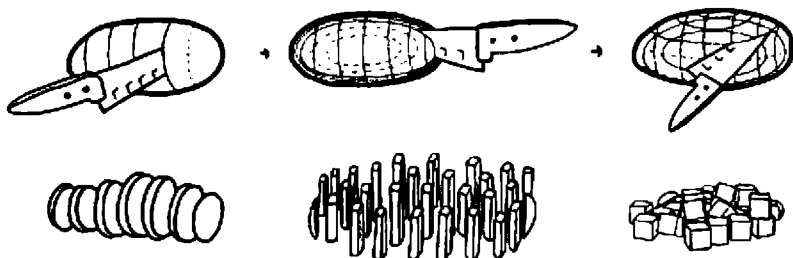
هذا الأمر شديد الغرابة، لأن العديد من الفيزيائيين يعتقدون أن أفضل نموذج لكوننا باعتباره **متعدد الشعب** في أربعة أبعاد، متضمنًا

الزمن كبُعدٍ رابع. إذا تبيَّن أنهم على حقٍّ، فإن ذلك يضع بعض الضغط على علماء الطوبولوجيا للعمل في البعد الرابع. لا يقتصر الأمر على أننا لا نعرف شكل الكون، حتى ننتهي من تصنيف **متعدد الشعب** في أربعة أبعاد، قد يكون للكون شكلٌ لم نتخيله بعد.

الأبعاد (*) - Dimensions

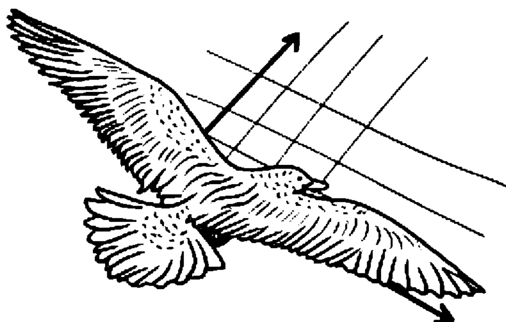
عندما يتحدث علماء الرياضيات عن البُعد الرابع، فإننا لا نتحدث عن الزمن، نحن نتحدث عن بُعدٍ هندسي رابع، تمامًا مثل الثلاثة الأولى، التي يمكن توصيفها من الأعلى إلى الأسفل، ومن اليسار إلى اليمين، ومن الأمام إلى الخلف، وبعد ذلك، دعنا نقول، الكلمة السحرية «flim-flam» لقد تعرَّفتُ على بُعدٍ آخر.

من الواضح تمامًا من النظر حولك، أن عالمنا له ثلاثة أبعاد مكانية فقط، لا تصدق كلامي ولكن إليك الدليل. إذا كنت ترغب في تقطيع البطاطس إلى قطعٍ صغيرة، فأنت في حاجة إلى إمساك السكين في ثلاث اتجاهات مختلفة.



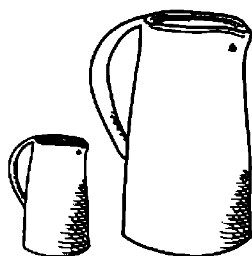
(*) البُعد في الفيزياء والرياضيات يعرف لمكان أو لجسم بالحد الأدنى للإحداثيات اللازمة لتحديد أي نقطة في داخله.

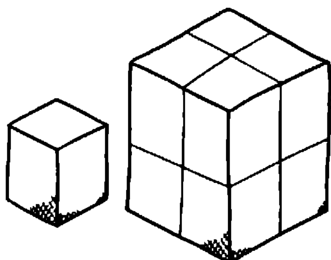
إليك طريقة أخرى للكلام: تخيل أنك تستطيع السفر في اتجاهين فقط، سيكون معظم الفضاء محظورًا عليك، أي اتجاهين يسمحان بمستوى مسطح فقط للحركة.



ولكن إذا أضفت اتجاهًا ثالثًا، يمكنك السفر في السماء بأكملها، يتطلب الأمر ثلاثة اتجاهات لتغطية فضاء ثلاثي الأبعاد.

فكرة أخرى: تخيل إبريقًا من أي حجم وشكل، إذا صنعت نسخة طبق الأصل منه بحيث يبلغ حجم النسخة الجديدة ضعف حجم الأولى بالضبط، فستحتوي بالضبط ثمانية أضعاف كمية الماء، أي ضعف كل بُعدٍ.





ما فائدة الحديث عن البعد الرابع الخيالي عندما نكون على يقين من أن لدينا ثلاثة فقط؟ لماذا لا نصنف **متعددات الشعب** حتى ثلاثة أبعاد، وبهذا نكون صنَّفناها وانتهى الأمر؟

يمكنني أن أقدم إجابتين: إحداهما من عالِم رياضيات بحتة، والأخرى من عالِم رياضيات تطبيقية.

بالنسبة إلى عالِم الرياضيات البحتة، فإن السؤال يفتقد الأساس. نحن لا نصنِّف **متعددات الشعب** لتكون مفيدة، نحن فضوليون فقط لمعرفة الأنواع المختلفة الممكنة من الأشكال التي يمكن أن توجد! لا يتعيَّن علينا تقييد أنفسنا بهذا العالم العشوائي الذي نعيش فيه؛

الرياضيات عامة ولها طبيعة كونية؛ فهي ليست مصنوعة طبقًا لتصوراتنا، وبالتالي، تمام، لدينا ثلاثة أبعاد، ثم؟ لأن لدينا عشر أصابع فهل نتوقف عن العد عند الرقم عشرة؟

كانت هناك قائمة من **متعددات الشعب** على شكل صحيفة موجودة، بطريقة ما، قبل أن نكتبها على الإطلاق، وستظل قائمة كاملة من **متعددات الشعب** على شكل صحيفة بعد فترة طويلة من ضياع حضاراتنا في التاريخ. إذا كانت هذه الفكرة بمفردها لا تجعلك تشعر بالفضول بشأن أنواع **متعددات الشعب** الموجودة في الأبعاد الأعلى، فقط لأنها ليست مفيدة، حسنًا، فأنت في الحقيقة لا تبحث عن الأسباب الصحيحة.

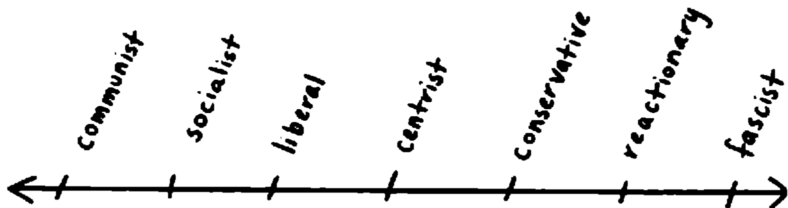
ثم يأتي عالِم الرياضيات التطبيقية ويدمر كل شيء عن طريق جعل الطوبولوجيا مفيدة.

كما يحدث، فإن التعرُّف على **متعددات الشعب** الطوبولوجية مفيدٌ في الواقع في عددٍ غير قليل من السياقات. نعم، حتى تلك ذات الأبعاد الأعلى! ليس هذا هو سبب تطوير هذا المجال، أو السبب الذي يجعل الناس يعملون عليها حتى اليوم، ولكن اللغة ومجموعة أدوات الطوبولوجيا تكون مفيدة في الكثير من الأحيان عند تحليل جوانب من العالم الحقيقي.

سبب كونه مفيدًا: يميل البشر إلى أن تكون فكرتهم مقترنة بالرؤية، لذلك غالبًا ما نقوم بإجراء مقارنات بصرية لمساعدتنا على فهم الأفكار المجردة.

تمتلئ لغاتنا اليومية بالتشبيهات المرئية حتى إننا لا نلاحظ أننا نستخدمها: أنت «تمضي قدمًا» في مشروع، والإيجارات «ترتفع»، والمناقشة التي لا نهاية لها تدور «في دوائر مفرغة»، عندما نجري هذه المقارنات، فإننا نترجم مشاكل الحياة الواقعية إلى مشاكل الطوبولوجيا.

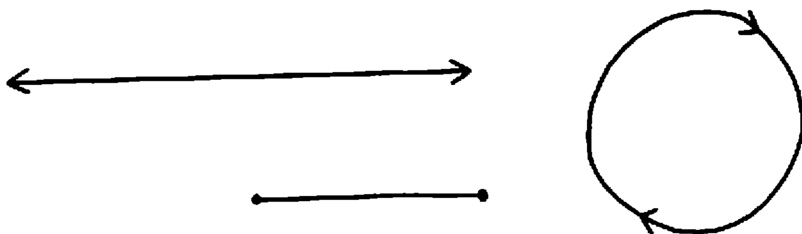
فكِّر في السياسة، على سبيل المثال، الأيديولوجية السياسية هي شيء معقد للغاية، وليس من الواضح دائمًا كيفية مقارنة معتقدات شخصين بطريقة موجزة. لتبسيط الأمور، من الشائع وضع الأيديولوجيا على محور يسار-يمين، مع المثل العليا التقدمية والليبرالية والمساواة على اليسار، والآراء التقليدية والمحافظة والليبرتارية على اليمين.



هذا ليس نظامًا مثاليًّا، لكنه تشبيه بصري مفيدٌ، يمكننا الآن طرح أسئلة صعبة ومتعددة الأوجه بمصطلحات أساسية ومرئية:

«من الذي يهتم بحقوق العمال؟» بالتأكيد، لقد فقدنا الكثير من التفاصيل -لا يوجد شيء في العالم الواقعي واضحٌ وعارٍ مثل العالم المجرد للطوبولوجيا- ولكنها تحافظ على الكثير مما يهم.

بمجرد إعداد تشبيه مرئي مثل هذا، يمكنك الوصول إلى جميع اللغات والأدوات الخاصة بالطوبولوجيا، يمكنك أن تتساءل عن أي مساحة هي أفضل تمثيل للنظام: هل هي دائرة أم خط لا نهائي؟ بمعنى آخر، هل الأيديولوجيا دورية، أم يمكنك دائمًا الانتقال إلى اليسار وإلى اليمين؟ أم أن هناك نقاطًا خاصة؟ هل هناك مواقف «يسار حقيقي» و«يمين حقيقي»، والجميع في مكان ما في المنتصف؟



أو ربما يجب أن نعتقد أن هناك أبعادًا أكثر للأيديولوجية السياسية

من مجرد محور يسار-يمين واحد، يقول بعض الناس إنهم ليبراليون اجتماعيًّا لكنهم من ناحية المال فهم يميلون إلى الاتجاه المحافظ في نفس الوقت.

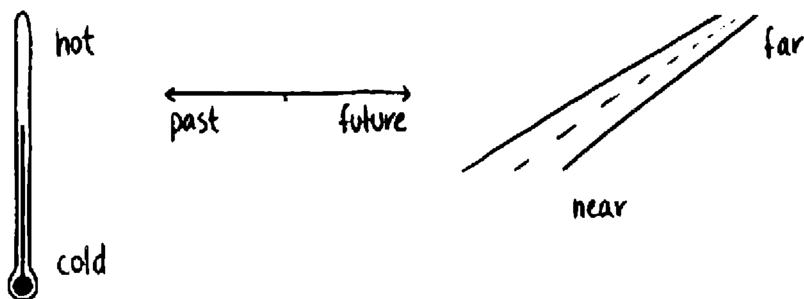
وهذا يعني أن المساحة الأيديولوجية ثنائية الأبعاد على الأقل، فإذا كان هذا صحيحًا، فما هو **متعدد الشعب** ثنائي الأبعاد الذي نتعامل معه؟

هل يمتد كلا المحورين إلى ما لا نهاية، مثل المستوى؟ هل يدور البعدان أحدهما حول الآخر ليكونا أسطوانة لا نهائية؟ هل يدور أحدهما حول الآخر، مثل الطارة؟ (حسنًا، ربما لا يدور كلاهما مثل الطارة).

يمكن أن تكون هذه الأسئلة أكثر من مجرد فضولٍ مثير للاهتمام، إذا كان لديك هدفٌ محددٌ له علاقة بالأيديولوجيات -ربما التنبؤ بكيفية تصويت الناس، أو محاولة العثور على مؤيدين لصناديق الاقتراع- فإن امتلاك نموذجٍ جيدٍ لمساحة الأيديولوجيا يُعَد أداة مهمة. تستخدم الحملات السياسية استطلاعات الرأي لتقدير توزيع الناخبين عبر مساحة أيديولوجية، ثم تستخدم هذه النماذج لتكييف رسائلهم وكسب الناخبين. لقد وجد علماء السياسة طريقة عامة لاستخدام سجلات تصويت المشرعين للتنبؤ بكيفية تصويتهم في المستقبل، وهي تعمل عن طريق وضع كل مشرع تلقائيًّا في فضاء أيديولوجي ثنائي الأبعاد.

هذه هي الطريقة التي يتم بها تصنيف **متعددات الشعب** خارج الرياضيات. ما عليك سوى حل مشكلة الرياضيات المجردة مرة واحدة، وبعد ذلك في أي وقتٍ تستخدم فيه تشبيهًا مرئيًّا لمناقشة شيء ما، فإن قائمة المساحات للاختيار من بينها هي نفسها دائمًا.

وأنا حقًّا لا أستطيع أن أؤكد هذا بما فيه الكفاية: نحن نستخدم المقارنات البصرية في كل وقتٍ. درجات الحرارة ترتفع وتنخفض، يمكن أن يكون الدخل منخفضًا أو مرتفعًا أو له سقف، شهر (ديسمبر) بعيدٌ، ثم يقترب، ثم يمر، ثم يتخلف عنا، كل هذه التعبيرات الاصطلاحية تمثِّل حالة نظام ما كنقطة في فضاء يعج بالمفاهيم، ثم تصف التغييرات في هذا النظام على أنها حركة مادية عبر ذلك الفضاء.



كل هذه الأمثلة تحدث في بُعدٍ واحدٍ، ولكن لا يزال من الممكن طرح أسئلة طوبولوجية مثيرة للاهتمام، هل تمتد درجة الحرارة إلى الأبد في كلا الاتجاهين؟ أم أن هناك برودة مطلقة أو حرارة مطلقة؟ هل يستمر الزمن إلى الأبد في المستقبل؟ أم سيكون هناك انسحاق كبير؟ أم أنه يدور حول نفسه، لذا إذا انتظرناه فترة كافية فسننتهي في الماضي البعيد؟

لمفاهيم أكثر تعقيدًا، نحتاج إلى استخدام **متعددات الشعب** ذات الأبعاد الأعلى، من المؤكد أنه من النادر جدًّا أن نحتاج فعليًّا إلى استخدام مزرعة **متعددات الشعب**- مستوى الإسقاطي الحقيقي، أو الطارة

الثلاثية، أو **متعددات الشعب** المجنونة غير المكتشفة في البعد الرابع (تظهر هذه أحيانًا في الفيزياء، ولكن هذا ما يتعلق بها على حد علمي). معظم الأنظمة التي نواجهها في حياتنا اليومية موصوفة جيدًا أساسًا من خلال المساحات المسطحة: الخط، والمستوى، والفضاء ثلاثي الأبعاد، إلخ.. في هذه الحالات، عندما نحاول فهم نظام ما، فإن السؤال الطوبولوجي الرئيسي سيكون فقط: «كم عدد الأبعاد التي يمتلكها؟».

هذا هو السؤال الذي يختبئ تحت السطح في الكثير من المناقشات عبر المجالات المختلفة، لدينا بعض المفاهيم، كم عدد الأبعاد التي لديها؟

عندما تقول إن الجنس هو طيفٌ وليس ثنائي، فإن هذا ادعاء طوبولوجي: أنت تقول إن فضاء النوع أو الجنس هو بُعد واحد (خط) بدلًا من البعد الصفري (نقطتان منفصلتان). أو ربما تعتقد أنه فضاء ذو أبعاد أعلى، والمحور الأنثوي-الذكوري هو أحد محاور الاختلاف بين العديد من المحاور، تتلخص الأسئلة حول نموذج المفهوم الذي يجب استخدامه أحيانًا في مسألة الأبعاد.

في هذه المرحلة، سأقضي بقية الفصل في استعراض العديد من الأمثلة للفراغات المعبرة عن المفاهيم ، وأتساءل عن عدد الأبعاد التي قد تمتلكها.

لنبدأ بالشخصية، من الواضح أن الأشخاص المختلفين لديهم شخصيات مختلفة، بل يمكن مقارنة شخصيات البشر، ويمكن أن تتغير تلك المقارنة تدريجيًّا باختلاف الطرق التي نستخدمها في التشبيه البصري. إذن ما هي أبعاد الشخصية؟ كيف يمكننا تقسيم الشخصية إلى مكونات؟

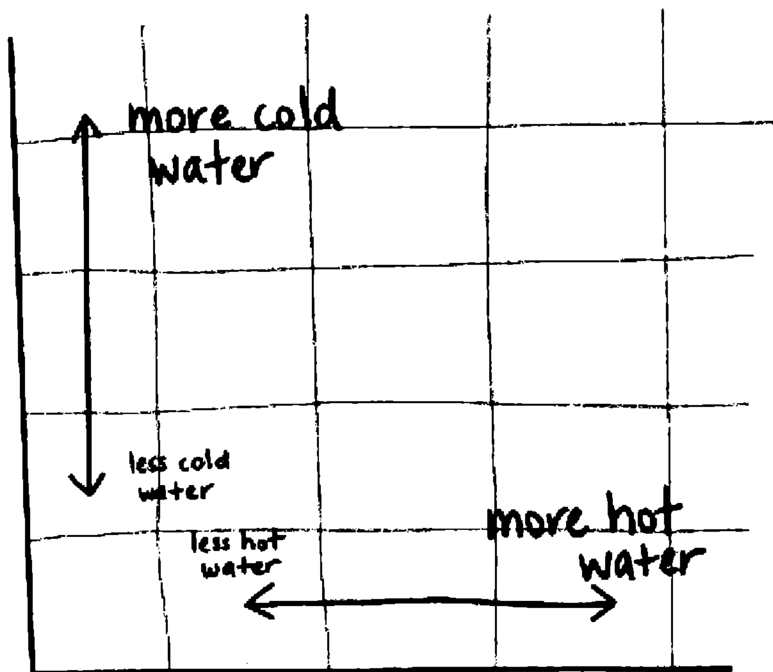
هناك الكثير من نماذج الشخصية التي يمكن الاختيار من بينها، وهي تأتي من تقاليد فكرية مختلفة، وتُستخدَم لأغراض مختلفة وتُقيَّم بطرق مختلفة. أحد الاختبارات الشائعة هو اختبار شخصية «مايرز بريجز» Myers-Briggs، الذي يستخدم أربعة محاور: الانبساطية - الانطوائية extroversion–introversion، والاستشعار - الحدس sensing–intuition، والتفكير - الشعور thinking–feeling، والحكم - الإدراك judging–perceiving. هناك أيضًا اختبار أقل شهرة ولكن يفضِّله الأكاديميون هو نموذج «الخمسة الكبار» أو نموذج OCEAN، الذي له خمسة أبعاد: الانفتاح على التجربة openness to experience، والضمير conscientiousness، والانبساطية extroversion، والقبول agreeableness، والعصابية neuroticism. ثم هناك علم التنجيم astrology، الذي يركز على اثني عشر نوعًا من الشخصيات المرنة إلى حدٍّ ما، كل منها يظهر بطرقٍ مختلفة وبدرجاتٍ مختلفة في كل شخص، أفترض أنه يمكن أن نتجادل بشأن فضاء ذي اثني عشر بعدًا.

أي من هذه النماذج هو الصحيح؟ حسنًا، لا شيء صحيح منها. على الأقل ليس بالضبط.. الشخصية، بقدر ما أستطيع أن أقول، معقدة للغاية بحيث لا يمكن وصفها بالكامل حتى من خلال ما يصل إلى اثني عشر بعدًا. كما هو الحال مع الأيديولوجية السياسية، لا نأمل في العثور على وصفٍ مثالي، نريد فقط توضيح بعض الأساسيات، لذلك لدينا لغة مشتركة للتحدث عن الشخصيات ومقارنتها.

نظرًا إلى عدم وجود نموذج مثالي، يمكن استخدام كل نموذج بطرقٍ مختلفة بواسطة أشخاص مختلفين لأسباب مختلفة. على سبيل المثال، يستخدم بعض المعلنين نموذج OCEAN لتصميم إعلانات مستهدفة على الإنترنت، ووصف المنتجات بطريقة ما للأشخاص الأكثر وعيًا وطريقة أخرى للأشخاص الأقل وعيًا. من الواضح أن هذا النموذج يعمل جيدًا إلى حدٍّ ما لهذا الغرض، ولكن بالطبع إذا لم يكن اهتمامك بالشخصية متجذرًا في توقع سلوك الشراء لدى الناس، إذن، فمن المناسب أن تستخدم نموذجًا مختلفًا.

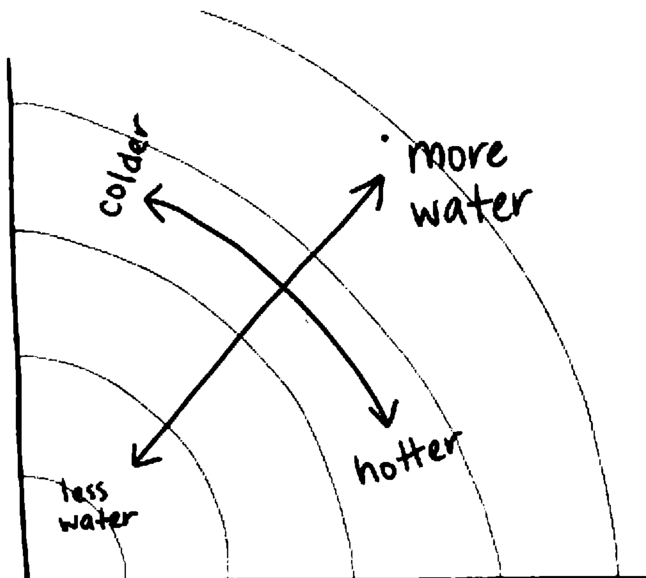
جديرٌ بالذكر: كل هذه النماذج لها أكثر من ثلاثة أبعاد، وهذه ليست مشكلة، إذا كان لديك نموذج ثلاثي الأبعاد جيد، فيمكنك تمثيل كل شخص كنقطة في فراغ فعلي ثلاثي الأبعاد بشكل حرفي. وبالتأكيد، لا يمكنك فعل ذلك بأربعة أو أكثر، ولكن لا يزال في إمكانك تخيل ما قد يعنيه ذلك نوعًا ما، حتى لو لم تتمكن من تخيل مساحة اثني عشر بعدًا.

إليك هذا المثال الأبسط من ذلك بكثيرٍ، دعونا نسميها فراغ الصنبور، ما هو الفراغ الممكن لإعدادات صنبور قياسي (ضبط درجة حرارة الماء)؟



الجواب هو اثنان، أنت تختار كمية الماء الساخن وكمية الماء البارد، وهذا يصف تمامًا إعدادات الصنبور. بالنسبة إلى نظام مثل هذا، يكون عدد الأبعاد هو نفسه عدد عناصر التحكم، لهذا السبب، تسمى الأبعاد أحيانًا «درجات الحرية degrees of freedom».

لكن انتظر: هناك طريقة أخرى لتحديد فراغ الصنبور، لا تحتوي بعض الصنابير على مقبضين منفصلين؛ بل لديها مقبضٌ واحدٌ يتحرك إلى أعلى وإلى أسفل للتحكم في كمية الماء، وإلى اليسار وإلى اليمين للتحكم في درجة الحرارة.



يغطي هذا النوع من الصنابير نفس فراغ الصنبور ذي المقبضين، ولهما نفس إعدادات المياه الممكنة تمامًا؛ إنهما مجرد طريقتين مختلفتين لفعل الشيء نفسه. إذا كنت تريد تحديد إعداد ماء معين، فيمكنك تحديد كمية الماء الساخن وكمية الماء البارد، أو يمكنك تحديد الكمية الإجمالية ودرجة الحرارة، في كلتا الحالتين، هناك إحداثيان، إنه فضاء ثنائي الأبعاد.

مثال منزلي آخر، لا أستطيع أن أفهم لماذا فرن التحميص الخاص بي به ثلاثة مقابض، بقدر ما أستطيع أن أقول، هناك متغيران يمكنني التحكم فيهما: درجة الحرارة، ومقدار الوقت قبل أن تنتهي مع رنة الجهاز. سيكون هذا فضاء ثنائي الأبعاد. فلماذا هناك ثلاثة مقابض؟ ما هو الفرق بين الخبز المحمص والخبز المشوي والخبز العادي؟

في أثناء وجودنا في المطبخ، لنتحدث عن الخبز، تحدد كل وصفة كمية الدقيق والزبدة والبيض وما إلى ذلك، ثم درجة حرارة الفرن ومقدار الوقت. يمكننا التفكير في وصفة كاملة، إذن، كنقطة في فضاء عالي الأبعاد، حيث يتوافق كل محور مع مكون واحد. عندما تغير وصفة بإضافة المزيد من مسحوق الكاكاو، فإنك تحرك نقطة الوصفة بعيدًا على طول محور مسحوق الكاكاو. عندما ترفع درجة حرارة الفرن، تحصل على وصفة جديدة على طول محور درجة الحرارة.

في هذا النموذج الطوبولوجي، تمثِّل الغالبية العظمى من النقاط وصفات مثيرة للاشمئزاز تمامًا، مثل جالون من مسحوق الخبز بالإضافة إلى بيضة واحدة. يمكن اعتبار فن الخبز على أنه عملية اختبار نقاط مختلفة في هذا الفضاء ومحاولة العثور على النقطة اللذيذة. هناك منطقة من مساحة الخبز هذه تسمى «الرقائق المحلاة Cookies» ومنطقة تسمى «كعكة cake» ومنطقة أصغر بداخلها تسمى «كعكة الرطل pound cake». بالطبع هناك المزيد من المتغيرات التي تدخل في عملية الخبز أكثر من مجرد قائمة المكونات –مثل مدى ليونة الزبدة عند إضافتها، أو كيف يرتب الخليط بالضبط في الفرن ونوع الطبق– ولكن يمكنك تخيل أن تضيف كل هذه التفاصيل كأبعاد إضافية وينتهي بك الأمر بنموذج شامل جدًّا للخبز كفراغٍ طوبولوجي.

الآن ربما يمكنك البدء في معرفة سبب اعتقاد بعض علماء الرياضيات المتشددين أن العالم بأسره يمثِّل مشكلة رياضية كبيرة. إذا تمكَّنَّا من تقريب المفاهيم المعقدة بشكلٍ جيدٍ إلى حدٍّ ما مع مفاهيم

الرياضيات الأساسية، فمن سيمنعنا من القول: بإمكاننا تعقيد نماذجنا فقط بشكلٍ طفيفٍ وسينتهي الأمر بوصف رياضي دقيق لكل شيء؟

ثلاثة أمثلة أخرى سريعة، قيل لنا إن التذوق له خمسة أبعاد، تتوافق مع خمسة أنواع من حاسة التذوق التي نملكها وهي: مالح، حلو، مر، حامض، أومامي umami «طعم لاذع لطيف». إذا كان هذا صحيحًا، فكل نكهة واحدة سبق لك تذوقها تقدم لك بمقدار من المالح بالإضافة إلى كمية من الحلو بالإضافة إلى هذا المذاق، إلخ.. يبدو هذا حزينًا ومختزلًا بعض الشيء، ولكن من ناحية أخرى، إنه عرض جيد لمدى المساحة الموجودة في فراغ خماسي الأبعاد.

بالإضافة إلى ذلك، ليس من الصواب القول إن النكهة هي نقطة واحدة في ذلك الفراغ. عندما تقضم التاكو (هو طعام تقليدي من المطبخ المكسيكي يرتكز على خبز الذرة أو تكون مطوية على تورتيللا، وقد يصنع من مجموعة متعددة من الحشوات كاللحم والدجاج والمأكولات البحرية والخضراوات والجبن تقدم تنوعًا وتعددًا في المذاق)، فأنت لا تتذوق نقطة تذوق واحدة، أنت تمر بتسلسلٍ سريع التغير من الأذواق المختلفة. لذلك ربما يكون من الأكثر دقة التفكير في كل نكهة كمسارٍ عبر فراغ التذوق، مما يمنحنا مساحة أكبر للعثور على نكهات جديدة حتى في حدود أذواقنا الأساسية الخمسة. بعد كل شيء، يوصف سمعنا من خلال متغير واحد (درجة الصوت، ويعرف أيضًا باسم التردد) ويستمر الناس في ابتكار طرقٍ جديدة وجميلة لجذبنا عبر فراغ الاهتزازات على مدار بضع دقائق.

اللون ثلاثي الأبعاد، ربما تعلمت هذا عندما كنت طفلًا، من دون صياغته من حيث الأبعاد. يمكن صنع كل لون من ثلاثة ألوان أساسية، مجتمعة بكميات مختلفة. اكتشفنا أن مساحة اللون كانت ثلاثية الأبعاد قبل وقتٍ طويلٍ من معرفة السبب: تحتوي أعيننا على ثلاثة مستقبلات لونية مختلفة، كلٌّ منها حسَّاسٌ لترددٍ مختلف للضوء. تهتز المخاريط الحمراء في أعيننا بقدر ما، وتهتز المخاريط الخضراء في أعيننا بقدر ما، وتهتز المخاريط الزرقاء في أعيننا بعض الشيء، وهذا ينتقي نقطة في مساحة لونية ثلاثية الأبعاد، ويعرف أيضًا باسم اللون.

هذا هو السبب في أن أدوات تعديل الألوان في برامج الكمبيوتر لها ثلاثة أبعاد للتحكم. في بعض الأحيان يعطونك ثلاثة منزلقات: الأحمر والأخضر والأزرق، أو في بعض الأحيان يكون: اللون والتشبع والسطوع. في بعض الأحيان يعطونك قرصًا ثنائي الأبعاد من الألوان بالإضافة إلى منزلق السطوع. كما هو الحال مع فراغ الصنبور، يمكن أن تكون هناك عدة طرق لاختيار الإحداثيات، لكنها تمتد على نفس مساحة اللون بالضبط. والأمر الرائع في الأبعاد هو أنه بغض النظر عن نظام الإحداثيات الذي تختاره، فإن لكل مساحة عددًا ثابتًا من الأبعاد.

لقد حفظت أغرب مثال أخيرًا. كما هو متوقع، توصف معظم هذه الفراغات الواقعية بشكلٍ جيدٍ بما فيه الكفاية من خلال الفراغات الأساسية المسطحة، من دون أي حلقاتٍ أو تقلباتٍ مغلقة. كان يُنظر إلى **متعددات الشعب** الأكثر غرابة على أنها نوعٌ من الفضول الفكري، وهو أمرٌ عمل عليه علماء الطوبولوجيا من أجل العثور عل كل **متعددات**

الشعب، ولكن بعد ذلك بدأ الناس يدركون أن الكون المادي قد يكون أحد هذه الفراغات الأكثر غرابة.

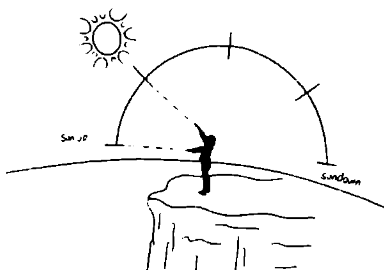
الفراغ الفيزيائي، كما نرى، له ثلاثة أبعاد، والزمن له بعد واحد. في بعض مجالات الفيزياء، يصبح من الضروري التعامل مع هذه المفاهيم معًا على أنها شيء واحد موحدٌ، الزمكان. تمامًا مثلما تعطي صديقًا وقتًا ومكانًا محددًا من أجل أن تلتقيه، يحدد الفيزيائيون الأحداث في الزمكان بإحداثيات رباعية الأبعاد. قد تعتقد أن الزمكان سيكون الفضاء القياسي رباعي الأبعاد، حيث يكون كل بُعدٍ عبارة عن خطٍّ مستقيمٍ. إنه ليس كذلك. على الأقل، عندما نحاول نمذجة الزمكان باعتباره فضاءًا قياسيًّا رباعي الأبعاد، فإنه يعطينا تنبؤات غير دقيقة.

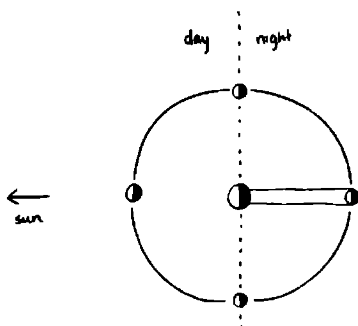
إذا كان الزمكان عبارة عن فضاء منحنٍ أو ملتوٍ، شيء مثل الطارة أو مستوى الإسقاط الحقيقي، فإن حدسنا حول كيفية عمل الواقع سوف ينهار عندما نحاول النظر إلى الكون ككل. يمكن أن يكون الكون محدودًا finite ولكن ليس له حدود no boundary، مثل سطح الكرة المجوفة؛ يمكن أن تتوسع ولكنها لا تتوسع في أي شيء. لا يمكن أن يكون هناك شيء حقًّا قبل الانفجار العظيم، تمامًا مثل عدم وجود شيء شمال القطب الشمالي. الأسئلة المتعلقة بإمكانية السفر عبر الزمن، أو الثقوب الدودية التي تأخذك على الفور من جزء من الفضاء إلى آخر، يمكن أن تحدد نوع الفضاء الذي نعيش فيه بالضبط.

بالطبع، لا يهتم علماء الطوبولوجي بأي من هذه «الرياضيات التطبيقية»، إنهم يحاولون فقط العثور على جميع الأشكال.

رياضيات الشمس والقمر

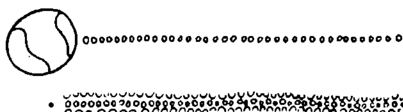
إذا كنت تعرف أي اتجاه هو الشرق وتعرف متى تشرق/ تغرب الشمس، يمكنك استخدام الزوايا لمعرفة الوقت.



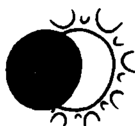


لا يظهر البدر أبدًا في النهار.

لا يظهر قمر جديد في الليل. تظهر نصف الأقمار نصف الوقت في كل منهما.

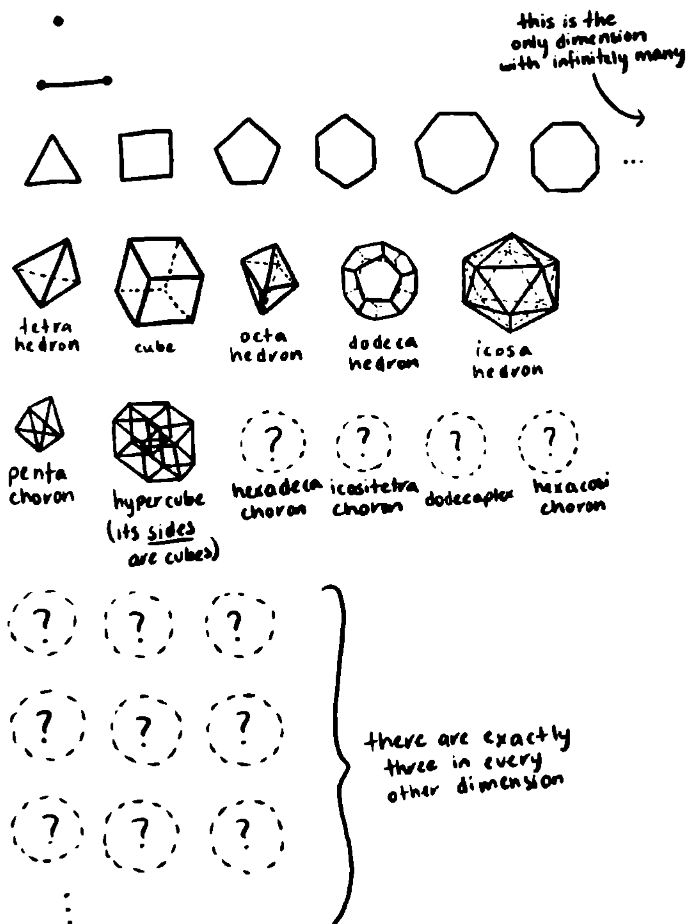


القمر على بُعد نحو مائة قمر، الشمس على بُعد نحو مائة شمس، هذا هو سبب كونهما بنفس الحجم في السماء.

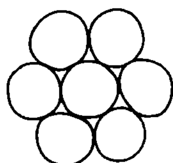


متعددات الأبعاد العادية

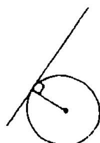
regular polytopes



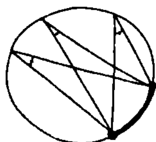
بعض الحقائق عن الدوائر



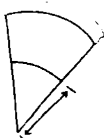
ست دوائر يمكنها أن تكون دائرة.



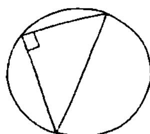
يكون نصف القطر متعامدًا على المماس عند أي نقطة.



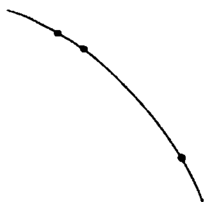
الزوايا التي تقطع نفس القوس متساوية.



النصف السفلي من الشريحة هو ربع البيتزا فقط.



أي مثلث يمثِّل إحدى أضلاعه قطر الدائرة هو مثلث قائم الزاوية.



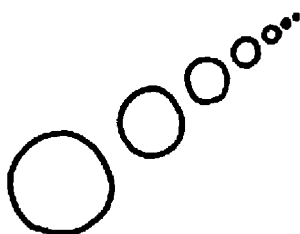
لأي ثلاث نقاط، هناك دائرة تمرُّ عبرها (حتى لو كانت دائرة ذات نصف قطر لا نهائي).

التحليل Analysis

اللانهاية - infinity

الاستمرارية - the continuum

الخرائط - maps



اللانهاية infinity

أنت تعرف ما هو اللا نهاية، إنه رقمٌ أكبر من كل رقم، هذا ما تفعله عندما تعد إلى الأبد من دون توقف، إنه كل ما يمكن إضافته إلى مجمل كل ما هو موجود.

عندما يسأل الناس عن اللا نهاية، هناك دائمًا شيء واحد يريدون معرفته:

هل هناك أي شيء أكبر من اللا نهاية؟

هذا السؤال له إجابة بالفعل، إنه ليس سؤالًا مفتوحًا، وليس سؤالًا خادعًا، الإجابة هي إما «نعم» وإما «لا»، وفي نهاية الفصل سأخبرك ما هي الإجابة.

يمكنك محاولة التخمين الآن، ولكن ربما يتعيَّن علينا تحديد قواعد اللعبة أولًا حتى تعرف ما نتحدث عنه.

على وجه التحديد، نحتاج إلى قاعدة لـ مفهوم «الأكبر»، كيف سنعرف على وجه اليقين ما إذا كنَّا قد وجدنا شيئًا أكبر من اللا نهاية؟ من السهل معرفة الكميات المحدودة عندما يكون هناك شيء أكبر من شيء آخر، لكن لا يبدو الأمر واضحًا جدًّا مع اللا نهاية. لا نريد أن نكتفي بإصدار الأحكام عما نتحدث عنه، لذا دعنا نختار قاعدة صلبة ومضمونة عندما تكون إحدى الكميات «أكبر» من الأخرى.

حسنًا، كيف يمكننا عادةً تسوية مسألة «الأكبر» في الحالات المنتظمة والمحدودة؟ ماذا يعني القول بأن الكومة على اليمين أكبر من تلك التي على اليسار؟



نعم، إنه واضحٌ تمامًا بمجرد النظر إليها، لكن تخيل أنك تقابل شخصًا ما، شخصًا غريبًا من كوكب آخر، لم يسمع من قبل عن «أكبر» أو «أزيد» أو «أعظم» أو أي شيء من هذا القبيل، كيف تشرح أن الكومة اليمنى أكبر؟ في الحقيقة، جرِّبها، إنه مفهوم أساسي يصعب بالفعل تهجئته من الأساس.

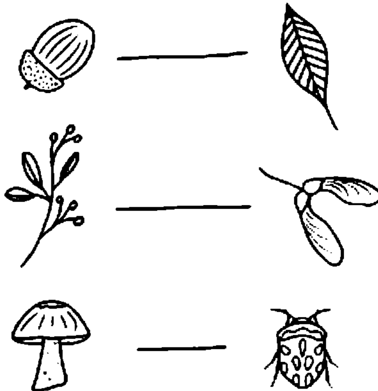
الحيلة الشائعة في الرياضيات، عندما تتعثَّر، هي أن تسأل السؤال المعاكس تمامًا لترى إلى أي مدى يأخذك الأمر، كيف تشرح للأجنبي

أن هاتين الكومتين من نفس الحجم؟



لا يمكنك الاعتماد على كلمة «تساوي»، لأن هذا هو بالضبط ما نحاول تعريفه. هذا الفضائي يريد أن يفهم ما تتحدث عنه، ما هي الفكرة الكبرى، عندما تطلق على الأشياء «متساوية» أو «متشابهة» أو هي نفسها.

إليك شيئًا يمكنك القيام به لتوضيح هذه النقطة، صف الأكوام وأظهر أنه يمكن إقرانها كل واحد إلى واحد آخر، إنها بنفس الحجم لأنه يمكنك مطابقتها بشكلٍ مثالي، من دون بقايا.



قاعدة جديدة

الأكوام لها نفس الحجم إذا كان في إمكانك مطابقة أجزائها من دون أي بقايا.

لقد نجحت خدعة «السؤال المعاكس»: يمكننا الحصول على تعريفٍ جيدٍ لكلمة «أكبر» من خلال قلب القاعدة.

قاعدة جديدة

إذا لم تتمكَّن من مطابقة كومة بشكل مثالي، فإن الجانب الذي به بقايا هو الكومة «الأكبر».

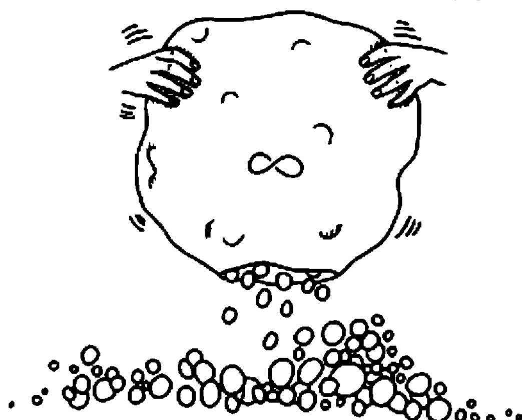
الآن أصبح السؤال واضح المعالم والإجابة محددة، هل هناك أي شيء أكبر من اللا نهاية؟ نعم أم لا؟ أي الإجابتين صحيح؟ هل سيتبقى أي شيء عندما تحاول مطابقته مع كومة لا نهائية؟ حان الوقت الآن لتقديم تخمين مستنير.

يمكننا التفكير في اللانهاية كحقيبة بلا قاعٍ تحتوي على كمية لا حصر لها من الأشياء.





يمكنك إزالة أي عددٍ محدودٍ من الأشياء من هذه الحقيبة، وستظل هناك دائمًا اللا نهاية.

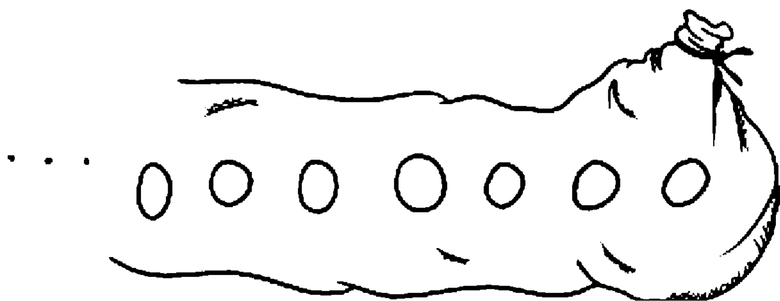


كيف يمكن أن يكون أي شيء أكبر من ذلك؟

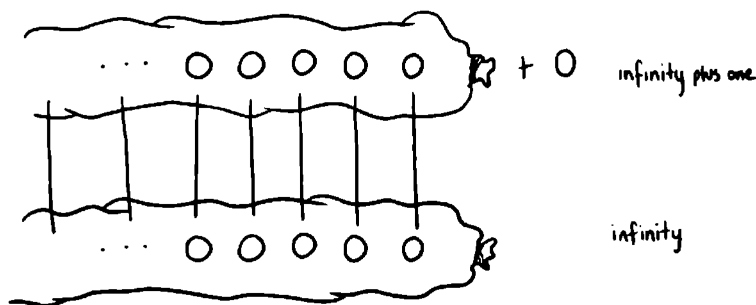
حسنًا، ماذا عن ما لا نهاية زائد واحد؟



لا يبدو أن كائنًا إضافيًّا يجب أن يُحدث فرقًا مقارنة باللانهاية، ولكن دعنا نستخدم قواعد المطابقة للتأكد، أولًا، يمكننا ترتيب أغراض حقيبة اللانهاية في خطٍّ بحيث يكون من الأسهل رؤية ما تتطابق معه.

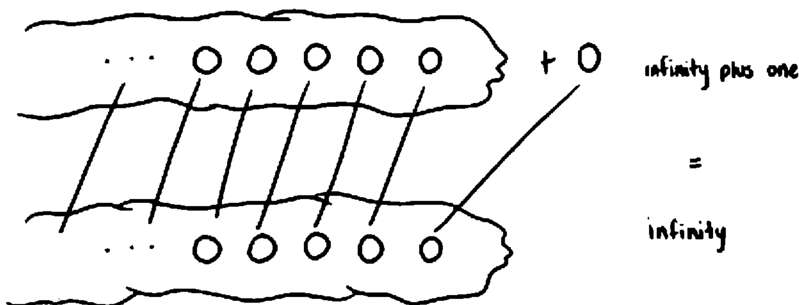


إذا حاولنا مطابقة الأشياء بالطريقة الواضحة، فمن المؤكد أن اللانهاية زائد واحد أكبر.



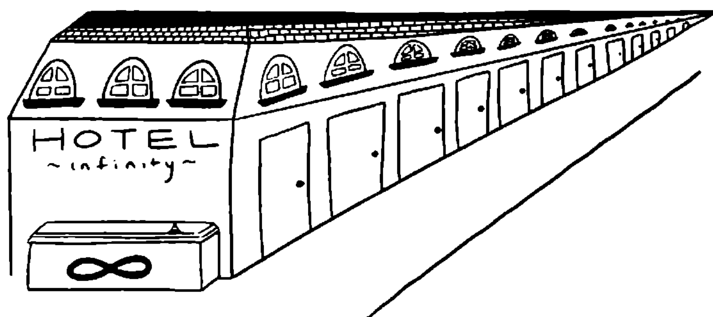
لكن كن حذِرًا! تقول قواعدنا إن أي شيء أكبر فقط إذا لم يكن في إمكانك أن تطابقها، (من الجيد دائمًا العودة إلى القواعد ثم التحقق منها).

هناك طريقة مختلفة لإجراء المطابقة تعمل جيدًا من دون أي بقايا على أي من الجانبين:



إذا كان هذا يبدو كأنه غشًّا، توقف مؤقتًا لإقناع نفسك بأنه ليس كذلك. نحن لا نطابق كائنًا نقطة -نقطة -نقطة، بل نطابقه مع الكائن التالي، المخفي خلف فكرة (نقطة -نقطة -نقطة). نظرًا إلى أن كل الحقائب تستمر إلى الأبد، فلا يوجد شيء من دون شريك، وبالتالي فإن الكوامتين متماثلتان في الحجم، اللا نهاية زائد واحد يساوي اللا نهاية!

دعوني أقدم لكم قصة لتوضيح مدى غرابة هذه النتيجة.

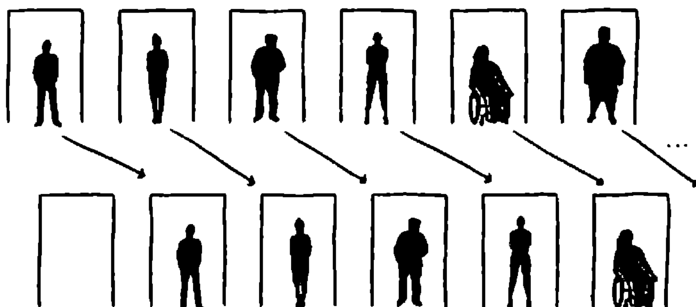


تخيل أنك موظف استقبال في فندق خاص جدًّا يُسمَّى فندق اللا نهاية. يحتوي فندق اللا نهاية على عددٍ لا نهائي من الغرف، هناك رواقٌ طويلٌ، به صفٌّ من الأبواب، والأبواب تستمر وتستمر إلى الأبد، ولا تنتهي أبدًا، بغض النظر عن المسافة التي تمشيها. لا يوجد «غرفة ذات رقم لا نهاية» أو «غرفة أخيرة» لأنه لا يوجد حدٌّ للممر، هناك غرفة أولى، وبعد ذلك لكل غرفة، هناك غرفة مجاورة.

الليلة هي ليلة مزدحمة بشكلٍ خاصٍّ: كل غرفة في الفندق ممتلئة، (نعم، هذا العالم به عددٌ لا نهائي من البشر أيضًا)، إذا كنت تمشي في الردهة كما تشاء، وتطرق أحد الأبواب، فسوف تسمع، «شخص ما هنا! ممنوع الإزعاج!» غرف لا نهائية، مليئة بعددٍ لا نهائي من البشر.

ثم دخل شخصٌ ما إلى بهو الفندق من العالم الخارجي، وقال: «هل يمكنني الحصول على غرفة من فضلك؟».

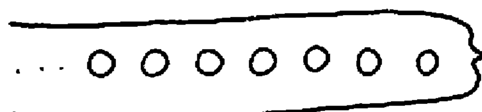
إنها ليست ليلتكَ الأولى في فندق اللا نهاية، لذا فأنتَ تعرف بالضبط ما يجب القيام به. تتحدث في الإذاعة الداخلية وتصدر إعلانًا: «أعتذر عن الإزعاج، ضيوفنا الكرام يُرجى الانتقال إلى الغرفة المجاورة، هذا صحيح: احزم أغراضك، واخرج إلى الردهة، وانتقل إلى الغرفة التالية لك في الردهة، شكرًا لكم، وأتمنى لكم ليلة سعيدة». بمجرد أن يفعل الجميع ما تقوله، تكون قد قمت بإخلاء غرفة للضيف الجديد.



الغرف لا نهائية، اللا نهاية بالإضافة إلى ضيفٍ واحدٍ، ولا يزال لديك تطابقٌ مثالي بين الغرف والضيوف؛ اللا نهاية زائد واحد يساوي اللا نهاية.

اللا نهاية زائد خمسة، اللا نهاية زائد تريليون، لا يهم؛ نفس المنطق قائم، يمكنك مطابقة الحقائب، ويمكنك أن تسكن الضيوف الإضافيين. اللا نهاية كبيرة جدًّا إلى درجة أن الكميات المحدودة لا تُسجل حتى بالمقارنة بها، لذلك لم نعثر على أي شيء أكبر من اللا نهاية.

ماذا عن اللا نهاية زائد اللا نهاية؟ هل يمكن مطابقة حقيبتين لا متناهيتين بحقيبة واحدة؟



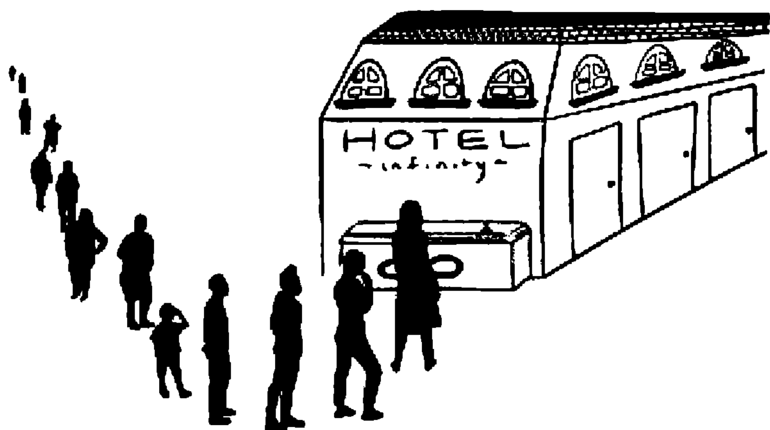


vs



لا يمكننا «التحايل» هذه المرة، نحن في حاجة إلى خدعة جديدة إذا أردنا أن نكون قادرين على مقاربة هذه المسألة، أو ربما سيكون من المستحيل مطابقتهما، وحينئذٍ سنجد شيئًا أكبر من اللا نهاية، ما رأيك؟

إليك نفس السؤال في مصطلحات فندق اللا نهاية، لقد عدت إلى المكتب، مع فندق كامل. في الردهة لا يمشي ضيفٌ واحدٌ جديدٌ، ولكن مجموعة لا نهائية جديدة من الضيوف، وكلها في حاجة إلى غرف، هل يمكنك أن تجد لهم سكنًا؟ هل اللا نهاية زائد اللا نهاية هي نفسها اللا نهاية؟

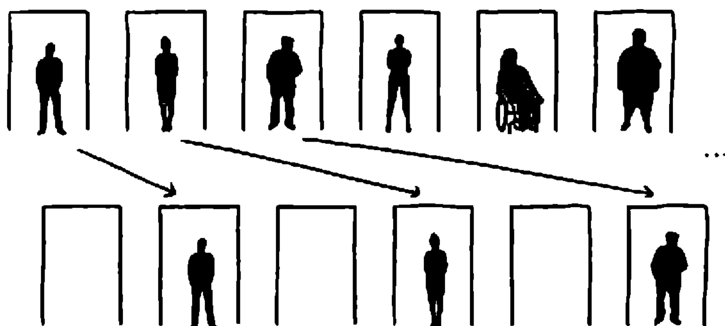


مرة أخرى، لن تنجح الحيلة نفسها، كيف يمكنك إخبار شخص ما بالسير عبر الأبواب اللا نهائية؟ أين سينتهي الضيف الأول؟ لا توجد «غرفة لا نهائية زائد واحد» للانتقال إليها.

هل هذا ممكن؟

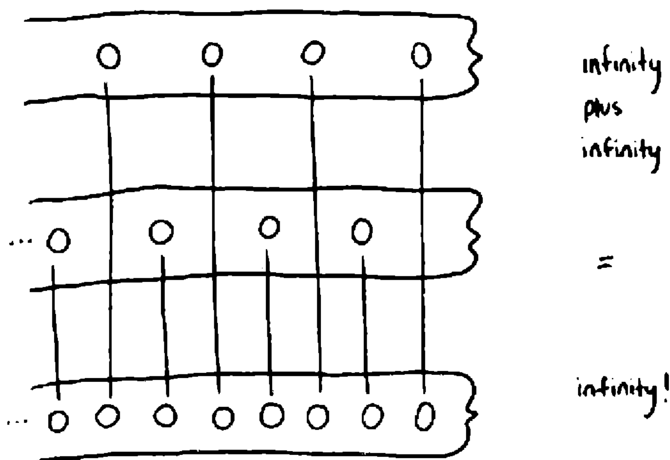
هذا ممكن، وإليك الطريقة، ستتحدث في الإذاعة الداخلية مرة أخرى: «أعتذر للجميع، هل من الممكن أن ينتقل الضيف في الغرفة

الأولى إلى الغرفة الثانية، وأن ينتقل الضيف في الغرفة الثانية إلى الغرفة الرابعة، وبشكلٍ عامٍّ، هل في إمكانكم أن يتحرك الجميع إلى الغرفة التي تبلغ ضعف رقمه الحالي داخل الردهة؟».



لا يزال لدى الجميع غرفة، وبأعجوبة، من خلال تباعدهم، فُتِحت غرفٌ لا متناهية للضيوف الجدد، إذا كانت الأبواب مرقمة، فإن جميع الغرف الفردية أصبحت فارغة الآن.

إليك نفس حجة التباعد في عالم الأكياس:



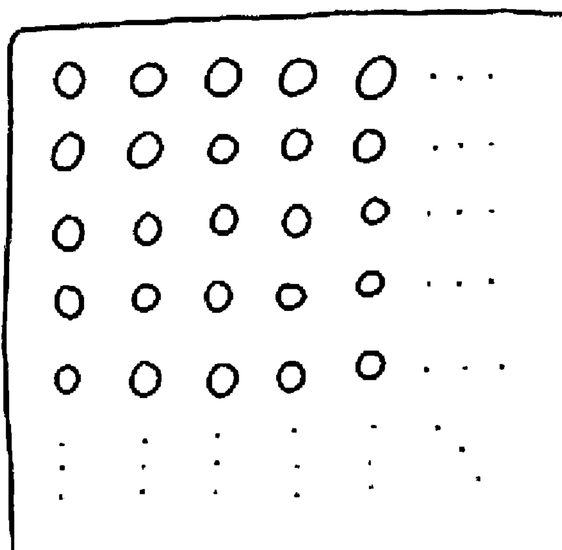
ربما تعتقد أن هذا كثيرٌ جدًّا، إنه بالتأكيد غير بديهي بعض الشيء، سأقدم لك ذلك، ولكن إذا كنت تريد حقًّا التحدث عن اللا نهاية، فسيتعيَّن عليك أن تشكِّك في حدسك.

ستحصل على نتائج غريبة وغير بديهية، مثل أن اللا نهاية تساوي ضعف نفسها. رفض علماء الرياضيات العمل مع اللا نهاية لأطول وقت بسبب إثباتات مثل هذه، وسيظل الكثير من معلمي الرياضيات اليوم يقولون لك إن اللا نهاية ليست رقمًا، إنها ليست رياضيات حقيقية.

ولكن هذا هو سر الرياضيات الحقيقية: يمكنك دراسة أي شيء بشكل مطلق، ما دمت ستضع قواعد اللعبة في وقتٍ مبكرٍ. يمكنك العمل مع اللا نهاية، إذا كنت واضحًا بشأن ما يعنيه ذلك وكنت على استعدادٍ لتقبل بعض النتائج التي يحتمل أن تكون غريبة. في هذه الحالة، القاعدة التي اخترناها لـ «التشابه أو التساوي» تجعل اللا نهاية زائد اللا نهاية يساوي اللا نهاية. إذا لم يعجبك ذلك، فأنا أتفهم، ولديك الترحيب بالعودة واختيار قاعدة مختلفة وإعادة طرح السؤال، سألتزم بالقاعدة التي اخترناها سابقًا.

اللا نهاية بالإضافة إلى اللا نهاية هي اللا نهاية، وبنفس المنطق، ثلاث لا نهائيات أو ألف لا نهاية، كلها لا تزال متساوية مع اللا نهاية الأصلية نفسها، هل حان وقت الاستسلام؟

دعونا نحاول مرة أخرى، ضرب اللا نهاية في اللا نهاية، هل هذا أكبر من اللا نهاية؟

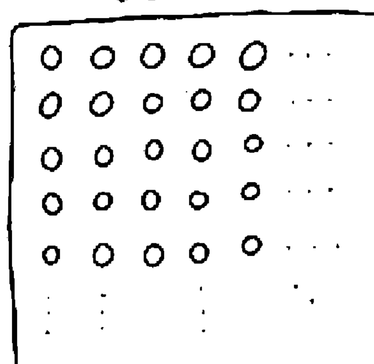


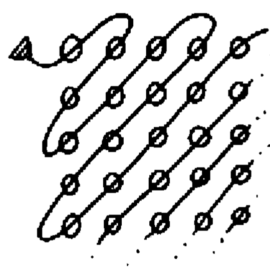
هل يمكنك مطابقة هذا مع حقيبة واحدة لا متناهية؟

سأقطع مباشرة المطاردة هذه المرة: يمكنك ذلك، لا يزال الحجم نفسه، هذا دليل من دون كلماتٍ.

إثبات

$\infty \times \infty$







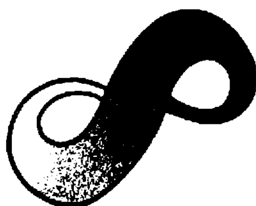


$= \infty$

وهو المطلوب إثباته.

إذن إليكم الأمر: اللا نهاية مضروبة في اللا نهاية تساوي اللا نهاية، ما زلنا لم نعثر على أي شيء أكبر، لذا الآن، كما وعدنا، حان الوقت للكشف عن إجابة السؤال الكبير.

هناك شيء أكبر من اللا نهاية، يطلق عليه اسم الاستمرارية continuum.



the continuum -الاستمرارية

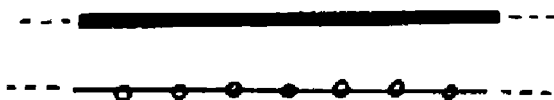
الاستمرارية أكبر من اللا نهاية بالطريقة التي تكون فيها اللا نهاية أكبر من واحدٍ، إنه أكبر بشكلٍ لا يمكن تصوره، إنه نوعٌ مختلفٌ من «أكبر»، إنه كبير جدًّا إلى درجة أن اللا نهاية العادية لا يمكن أن توضع في مقارنة.

يُشار أيضًا إلى الاستمرارية باسم «اللا نهاية المستمرة» وتُكتَب بشكلٍ شائعٍ على أنها مجرد حرف c صغير. من الناحية الجمالية، يمكنك التفكير في الاستمرارية على أنها ذات ملمسٍ ناعمٍ ومستمرٍّ، مثل الشريط. يتناقض هذا مع اللا نهاية كما ذكرت في الفصل الأخير التي تصورناها على أنها حقيبة من الأشياء المنفصلة، يُطلق على هذه اللا نهاية «اللا نهاية القابلة للعد countable infinity» لأنه يمكنك الإشارة إلى كل عنصر من عناصرها الفردية وترتيبها.

الاستمرارية هي عدد النقاط في الخط، لا يهم إذا كان الخط محدودًا أم لا نهائيًّا، الملمس هو ما يهم، كثافة النقاط. نتعامل هنا مع هذا النوع الثري والكامل والسميك من اللا نهاية، بغض النظر عن مدى

التكبير، فلن يخف أبدًا، شريحة صغيرة من الخط لا تزال تحتوي على نقاط مستمرة.

من المفيد مقارنة الاستمرارية باللا نهاية الأصلية القابلة للعد لمعرفة مدى حجمها. اللا نهاية القابلة للعد مثل الأعداد الصحيحة: سلسلة من النقاط، متباعدة بالتساوي على خطٍّ لا نهائي. يمكنك إنشاء شبكة ثنائية الأبعاد من النقاط مثل هذه، أو شبكة ثلاثية الأبعاد، أو أربع نقاط أو أكثر، وستظل لديك مجموعة من النقاط المنفصلة. حتى إذا قمت بزيادة التباعد بين النقاط، بمعامل يصل إلى مائة أو مليون، تظل النقاط منفصلة، وإذا قمت بالتكبير بدرجة كافية، يمكنك اختيار نقطة معينة، هذه لا نهاية قابلة للعد.

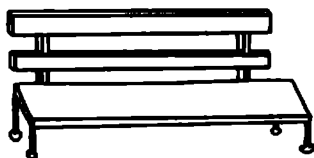


على النقيض من ذلك، تتضمن الاستمرارية جميع النقاط الواقعة بين النقاط التي تحدثنا عنها آنفًا.

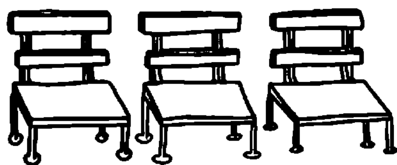
كل منهم، إنه بحرٌ شاسعٌ وسلسٌ من النقاط التي يمتزج بعضها ببعض، إنها غير معدودة.

طريقة أخرى للنظر في المسألة: إذا رميت سهمًا على خط الأعداد، فإن فرصة هبوطه بشكلٍ مثالي على رقمٍ صحيحٍ هي صفر تمامًا، ليست هناك فرصة صغيرة حتى، صفر، يوجد عددٌ لا نهائي من الأرقام في المنتصف.

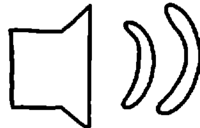
هذا تمييزٌ مهمٌّ يظهر كثيرًا في الرياضيات وفي العالم الحقيقي: «متقطع discrete» مقابل «مستمر continuous»، فيما يلي بعض الأمثلة المألوفة:



continuous

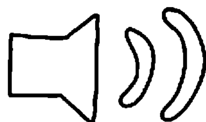


discrete



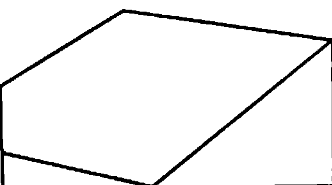


continuous

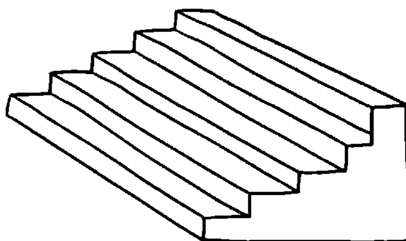




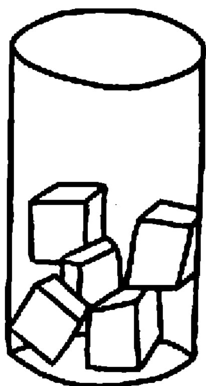
discrete

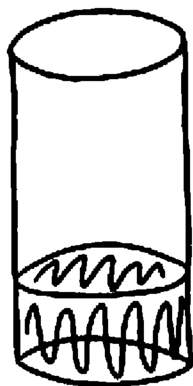


continuous



discrete





أي مجموعة منفصلة من الأشياء لها إما حجم محدود وإما حجم غير محدود إلى حدٍّ ما. في كل هذه الأمثلة، إنها محدودة، لكن تخيل أن لديك عددًا لا نهاية له من الكراسي، هذا يشبه الحقيبة في الفصل الأخير: منفصلة، متقطعة، قابلة للعد. إذا سألت: «كم عدد الأماكن الموجودة للجلوس؟» الجواب هو اللا نهاية، اللا نهاية القابلة للعد.

ومع ذلك، بالنسبة إلى المقعد، سواء كان طويلًا بشكلٍ نهائي أو يمتد إلى الأبد، فإن الإجابة عن «كم عدد الأماكن المتوفرة للجلوس؟» هو c، الاستمرارية. وفي الواقع، بالنسبة إلى أي مكانين للجلوس، بغض النظر عن مدى قرب أحدهما من الآخر، لا تزال هناك سلسلة متصلة من الأماكن للجلوس بينهما.

لقد كنت ادعي للتوِّ أن c أكبر من اللا نهاية، لكننا لم نثبت ذلك، لقد توصلنا إلى الكثير من الأشياء في الفصل الأخير التي بدت أكبر من

اللا نهاية ولكنها في الواقع لم تكن كذلك، فكيف يمكنني أن أكون واثقًا جدًّا من أن الاستمرارية أكبر في الحقيقة؟ سنحتاج إلى إثبات ذلك، باستخدام قاعدة المطابقة والبقايا، علينا أن نظهر أنه لا توجد طريقة ممكنة لمطابقة اللا نهاية مع الاستمرارية.

هذا مراوغ بعض الشيء، من السهل إثبات أن شيئًا ما ممكنًا: ما عليك سوى أن تفعله، من الصعب إثبات أن شيئًا ما غير ممكن. لا يمكنك تجربة طريقتين مختلفتين ثم تستبسلم وتقول، «هل ترى؟ لا يمكن فعل ذلك»، لأن شخصًا ما قد يأتي لاحقًا بطريقة ذكية جدًّا لمطابقة الأشياء، وسيكون ذلك محرجًا جدًّا. عليك أن تثبت، بشكلٍ قاطعٍ، بشكلٍ نهائي، أنه لا توجد طريقة ممكنة لمطابقة هذين الحجمين اللا نهائيين، عليك أن تثبت أن أي محاولة لمطابقتهما ستفشل حتمًا؛ وهذا صعب التنفيذ.

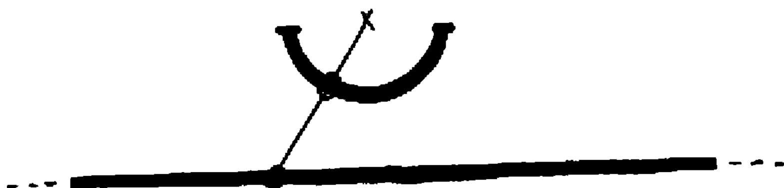
سأريكم دليلًا على أن الاستمرارية أكبر من اللا نهاية، لكنني سأحتفظ بها حتى نهاية الفصل، لأنها طويلة قليلًا وقد تستغرق بعض التحديق وحكة الرأس، إنه دليلٌ جميلٌ، لهذا أريد أن أقدمه هنا، لكنه بالتأكيد أقوى إثبات في الكتاب.

بدلًا من ذلك، لإيقاف الفضول لديكَ، إليك دليلًا جيدًا آخر مرتبطًا أيضًا بما نتحدث عنه، أخبرتك أن الاستمرارية هي نفسها سواء كانت خطًّا منتهيًا أو خطًّا لا نهائيًّا، هذا إثبات.

إثبات

خذ استمرارية محدودة واستمرارية متصلة لا نهائية، اثنِ المحدودة إلى نصف دائرة، وارسم علامة X في المنتصف، ضع اللا نهائية في خط مستقيم أدناه.

الآن إليك كيف نطابقهم، لأي نقطة في الاستمرارية اللا نهائية استخدم مسطرة لتوصيلها بـ X؛ هذا الخط المتصل يعبر الاستمرارية المحدودة عند نقطة واحدة بالضبط، طابِق نقطة التقاطع تلك مع النقطة الأصلية في الاستمرارية اللا نهائية.



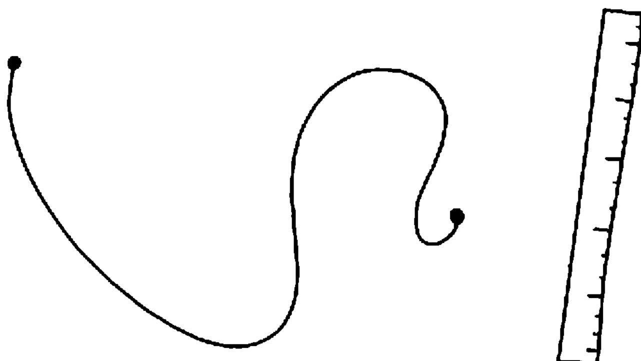
تتطابق كل نقطة في الاستمرارية اللا نهائية مع نقطة واحدة بالضبط على نقطة في الاستمرارية المحدودة، والعكس صحيح؛ لا توجد بقايا على أحد الجانبين، لذا فهما متساويان(٢).

وهو المطلوب إثباته.

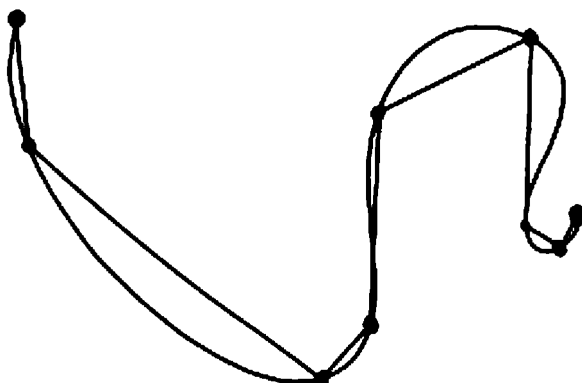
قد تتساءل عمَّ إذا كان أي كائن كثيف وغني مثل الاستمرارية يمكن أن يوجد بالفعل في العالم الحقيقي، بالتأكيد لا يمكن أن تكون هناك استمرارية على الشاشة، لأن الشاشات مصنوعة من وحدات تسمى البكسل والبكسل هي كائنات متقطعة ومنفصلة. بالطريقة نفسها، إذا كان عالمنا مصنوعًا من جزيئات صغيرة، فلا يوجد أبدًا لا نهائية مستمرة لأي شيء، باستثناء ربما الزمن.

ومع ذلك، بطريقة ما، فإن الاستمرارية هي الشخصية الرئيسية لأكثر المجالات المفيدة للرياضيات خارج الحسابيات الأساسية basic arithmetic. لقد بنيت معظم العلوم والاقتصاد الحديث على أداة رياضية واحدة تتيح لك جمع استمرارية من الأرقام معًا والحصول على إجابة محدودة. تسمى هذه الأداة بالتكامل، لكنني سأسميها الجمع الاستمراري أو الجمع المستمر continuum-sum، لأن هذه هي حقيقته.

إليكَ فكرة عن كيفية عملها، لنفترض أنك تريد قياس طول مسار متعرج، ولكن كل ما لديك هو مسطرة مستقيمة.



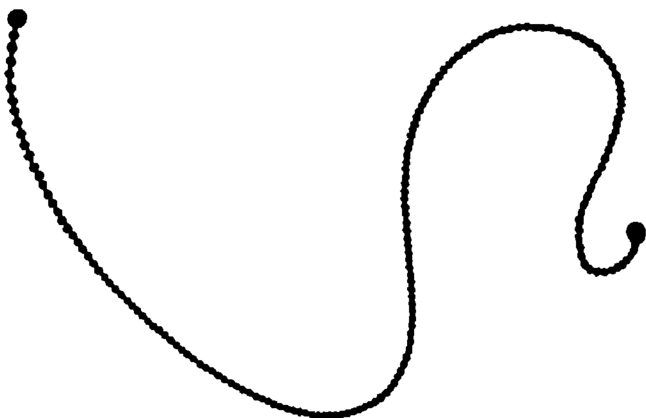
يمكنك الحصول على تقديرٍ تقريبي للطول بتقسيمه مقاطعَ مستقيمة تقريبية وقياس كلٍّ منها وإضافتها معًا؛ لن يكون الأمر دقيقًا، لكنه سيكون أقرب إلى الطول الحقيقي إلى حدٍّ ما.



إذا كنت في حاجة إلى إجابة أكثر دقة، فيمكنك قطع المنحنى إلى أجزاء أصغر بكثيرٍ، مما يصل إلى مائة أو حتى ألف.

ستكون كل قطعة مفردة صغيرة جدًّا، قريبة جدًّا من الصفر، ولكن إذا أضفتها بعناية واحتفظت بجميع الخانات العشرية، فستحصل على إجابة قريبة جدًّا من الطول الفعلي.

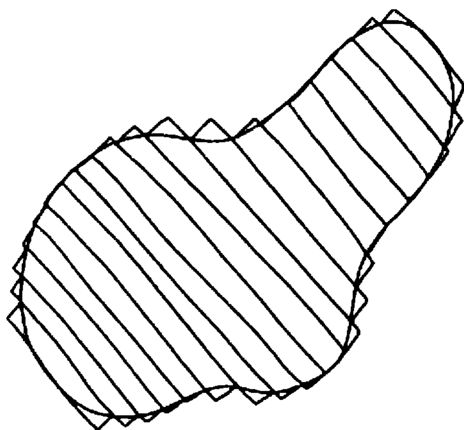
لكن بالنسبة إلى عالِم الرياضيات، «قريب جدًّا» لا يزال غير كافٍ، نحتاج إلى معرفة الطول بالضبط، ولقياسه، نقوم بشيء يبدو أنه غير ممكن: أن نقطع المنحنى إلى سلسلة متصلة من القطع (استمرارية من القطع)، قطع نقطية صغيرة جدًّا، وبطريقة ما، باستخدام المجموع المستمر، نضفهم جميعًا معًا.



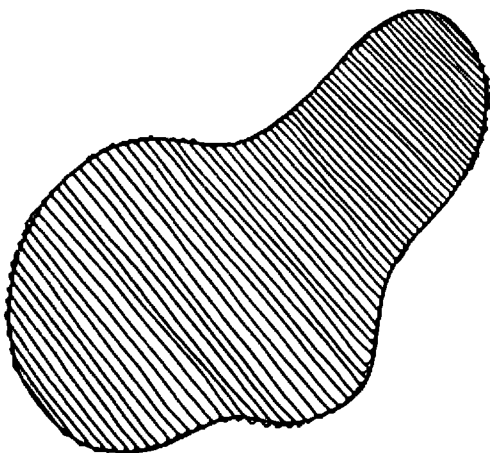
صدِّق أو لا تصدِّق، هذا شيء حقيقي يمكننا القيام به بالفعل، وينتج إجابة محدودة، ليست صفرًا أو ما لا نهاية، ولكن طولًا محددًا، مثل ستة أو باي π.

إنها خدعة رائعة، ومثل معظم الأدوات الرياضية، فهي عامة ومجردة بما يكفي لتُطبَّق عبر العديد من السياقات التي لا علاقة ببعضها البعض ظاهريًّا. سأقدم بعض الأمثلة الأخرى، ولكن لا توجد طريقة يمكنني من خلالها التعرُّف على مدى تنوع الجمع الاستمراري، إنها في كل مكان.

هذا مشابه للمثال الأول، ولكن لنفترض أنك تريد حساب مساحة غير منتظمة ما، بركة، على سبيل المثال، من السهل حساب مساحة المستطيل، لكن هذا ليس مستطيلًا. يمكنك حسابها عن طريق تقطيعها إلى قطع رفيعة، كل منها ستكون قريبة جدًّا من المستطيل.



ولكن إذا كنت تريد حساب المساحة بشكلٍ دقيقٍ، فستحتاج إلى تقسيمها إلى سلسلة متصلة من قطع رفيعة لخط، كل منها بمساحة متناهية الصغر، وإضافتها جميعًا معًا عن طريق الجمع الاستمراري.



يشكِّل الجمع الاستمراري لمجموعة من النقاط خطًّا، بينما يشكل الجمع الاستمراري لمجموعة من الخطوط مساحة.

إليك مثالًا يبدو مختلفًا تمامًا، ولكن في النهاية يحدث نفس النوع من الأشياء، تخيَّل أنكَ قمتَ بقيادة السيارة مدة ساعة في سيارة لا تحسب المسافة، هي تحتوي فقط على عداد سرعة، وأنت تريد أن تعرف المسافة التي سافرتها، بناءً على معرفة سرعتك في كل مرة، هل هذا ممكن؟ كيف يمكنك أن تفعل ذلك؟

يمكنكَ الحصول على تقديرٍ تقريبي (جدًّا) إذا نظرت إلى السرعة مرة واحدة خلال ساعة، وافترضت أن هذه هي سرعتك الثابتة طوال الساعة، لكن هذا ليس تقديرًا جيدًا جدًّا؛ ماذا لو بدأت ببطء وسارعت مع مرور الساعة؟ ربما تكون قد تحققت من عداد السرعة في لحظة لا تمثِّل الرحلة بأكملها.

يمكنكَ الحصول على تقديرٍ أفضل للمسافة الإجمالية إذا قسَّمت الساعة إلى فترات أقصر، تتحقق من عداد السرعة مرة كل فترة، وهذا يخبرك عن المسافة التي قطعتها في تلك الفترة، اجمع كل هذه المسافات، وهذا يتعلق بالمسافة التى قطعتها خلال هذه الساعة.



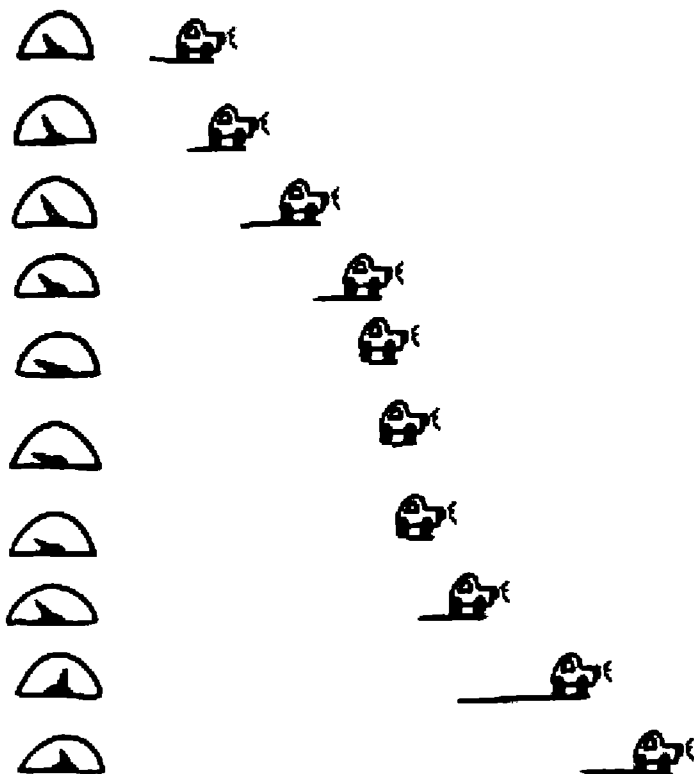







يصبح التقدير أفضل وأفضل عندما تقسم الساعة إلى أجزاء أصغر وأصغر، فكِّر في الأمر: عندما تصل إلى أجزاء طويلة من الثانية، من المحتمل أن تكون السرعة قريبة جدًّا من الثبات خلال تلك الثانية.

ترى كيف أن هذا مشابه لأمثلة المنحنى والنقطة؟ يمكنك الحصول على الإجابة الدقيقة عن طريق تقسيم الساعة إلى شرائح على طول الطريق إلى سلسلة متصلة من اللحظات، وجمع السرعات معًا في كل لحظة عن طريق الجمع الاستمراري؛ مجموع النقاط المتصل هو خط، ومجموع الخطوط المتصلة مساحة، ومجموع السرعات المتصلة هو المسافة.



يمكنك استخدام هذه الإستراتيجية نفسها ليس فقط لحساب المسافة من السرعات، ولكن لحساب أي كمية إجمالية عندما يكون كل ما لديك هو معدل تغيرها. إذا كنت تريد معرفة النقص الكلي في مساحة الغابات، وكل ما لديك هو معدل إزالة الغابات، فيمكنك استخدام الجمع الاستمراري.

بالطبع، إذا كان معدل إزالة الغابات (بالأشجار يوميًّا) ثابتًا بمرور الزمن، فلن تحتاج إلى استخدام هذه الطريقة، يمكنك فقط ضرب المعدل في عدد الأيام للحصول على الإجمالي. حتى إذا كان المعدل يتغير، إذا كان لديك بيانات يومية عن عدد الأشجار التي تُقطَع، فلا يزال في إمكانك جمعها معًا للحصول على الإجمالي، لكنه يصبح مناسبًا فقط عندما يتغيَّر المعدل باستمرار -كل جزء من الثانية- فأنت هنا في حاجة إلى الجمع الاستمراري.

هذا هو السبب في أن الجمع الاستمراري مفيدٌ بشكلٍ خاصٍّ في مجالات مثل الفيزياء والهندسة، حيث تتعامل مع جميع أنواع الكميات المتغيرة باستمرارٍ: درجات الحرارة، وتدفق الماء، وكميات الوقود، والسرعات، والتيارات الكهربائية، إلخ. لكنها أداة مريحة حتى إن الناس قد وجدوا طرقًا لاستخدامها بكميات متقطعة مثل الحسابات المصرفية، التي تتحرك في نقاطٍ منفصلة تبلغ حتى قرشًا واحدًا، أو مجموعات الحيوانات، التي تتحرك في نقاط منفصلة لحيوان واحدٍ. إذا كنت تتظاهر بأن «الثروة» أو «تعداد السكان» كمية مستمرة، يمكنك تطبيق نفس الأساليب التنبؤية التي يستخدمها الفيزيائيون والمهندسون،

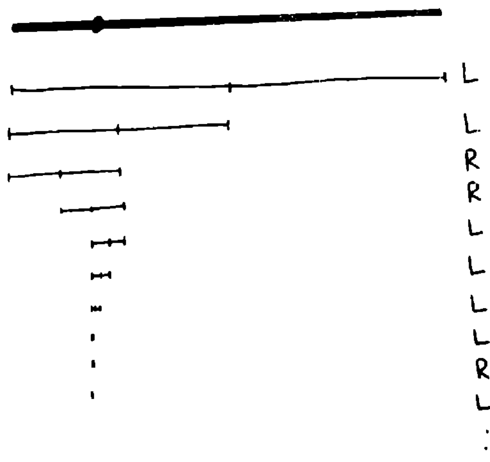
عليك فقط أن تتذكر التقريب إلى عددٍ صحيحٍ في النهاية.

والآن، بما أنك انتظرت بصبرٍ، فإليك دليلًا على أن الاستمرارية أكبر من اللا نهاية.

إثبات

سنثبت أن أي محاولة محتملة لمطابقة الاستمرارية مع اللا نهاية المنفصلة ستفشل، تاركة بقايا على جانب الاستمرارية. سنثبت، بعبارة أخرى، أن نقاط الاستمرارية لا يمكن وضعها في قائمة، حتى لو كانت قائمة لا نهائية.

سنستخدم استمرارية ذات طولٍ محدودٍ، لأن (تذكر) الحجم لا يهم، دعونا نعطي كل نقطة اسمًا، سيكون اسم كل نقطة عنوانًا يخبرك بمكان العثور عليها. يخبرك الحرف الأول ما إذا كانت النقطة على النصف الأيسر أو الأيمن: L أو R، يخبرك الحرف الثاني ما إذا كان على النصف الأيسر أو الأيمن من ذلك النصف، وهكذا، كلمنا اقتربنا سواء من اليسار أو اليمين من النقطة.



سلسلة محدودة من حروف L و R تضيق المنطقة المتصلة من الشريط، لكن عنوان LR الطويل بلا حدودٍ يمنحك موقع نقطة محددة.

كل نقطة لها عنوان LR فريد، وكل عنوان LR يختار نقطة فريدة(٣).

نريد أن نظهر أنه لا يمكنك وضع كل عنوان LR في قائمة، حتى لو قائمة لا نهائية. تخيل أن يأتي منافسوك بقائمة لا نهائية مع الإدعاء بأن كل عنوان LR موجود بها،، نحن نعتقد أنهم مخطئون، ولكن علينا إثبات ذلك.



a supposedly complete list of all points



LLRRLLLLRL...

LRLRLLRRRR...

LRRRRRRLRR...

LLRRLLRRRL...

LRRRLRLLLL...

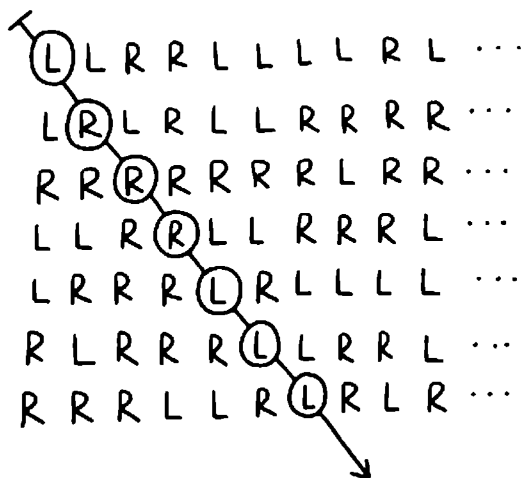
LLRRRLLRRLL...

LRRLLRLRLRL...

⋮

بغض النظر عن القائمة التي يقدمونها إلينا، نحتاج إلى أن نكون قادرين على العثور على نقطة مفقودة (تعرف أيضًا باسم عنوان LR-).

إليك كيف نفعل ذلك، ابدأ من بداية قائمتهم، مهما كان الحرف الأول من العنوان الأول، اكتب العكس، ثم، مهما كان الحرف الثاني من العنوان الثاني، اكتب العكس، استمر على هذا المنوال أسفل القطر اللا نهائي.





a missing point that proves the list is not complete.

لقد كتبت الآن عنوان LR كاملًا، ندعي أن عنوان LR هذا مفقود من قائمة منافسيك، كيف نعرف؟ حسنًا، لا يمكن أن يكون العنوان الأول في القائمة، لأنهم يختلفون في الحرف الأول (على الأقل!). لا يمكن أن يحتل المرتبة الثانية في القائمة أيضًا، لأنهم يختلفون في الحرف الثاني، إنه ليس العنوان المليار في القائمة، لأنه يحتوي على حرف المليار الخطأ.

لا يمكن أن يكون في أي مكان في قائمة منافسيك على الإطلاق.

لا يهم أي قائمة بين أيدي منافسيك، يمكننا دائمًا استخدام هذه التقنية للعثور على النقطة المفقودة، حتى إذا أخذوا عنواننا المفقود وأدخلوه في الأعلى، يمكننا فقط إعادة العملية مرة أخرى للعثور على عنوان جديدٍ.

هذا يعني أنه من المستحيل وضع جميع نقاط السلسلة في قائمة، حتى في قائمة لا نهائية، يجب أن يكون عدد النقاط في الخط (حتى الخط المنتهي) أكبر من اللا نهاية.

وهو المطلوب إثباته.

هذا الإثبات مثيرٌ للاهتمام بالنسبة إليَّ لأنه يُشعِر بالدوار والتخلف قليلًا، كل خطوة فردية مقنعة بالنسبة إليَّ: أرى كيف ننتقل من النقاط إلى العناوين، وأرى كيف تعمل الخدعة القطرية. وبطريقة ما، عندما

تتابع الحجة المنطقية، تكون قد أثبتَّ شيئًا رائعًا حول اللا نهاية، فقط من الحديث عن حروف L و R.

إذا قبلت هذا الإثبات، فهناك حقًّا شيء أكبر من اللا نهاية، ليس هناك حدود لا نهائية فقط، هناك طبقة أخرى فوق ذلك. الأمر الذي يثير الكثير من الأسئلة، هل هناك أي شيء بين اللا نهاية والاستمرارية، أم أن الاستمرارية هي الشيء الأكبر «التالي»؟ هل هناك ما هو أكبر من الاستمرارية؟ كم عدد الأحجام اللا نهائية المختلفة الموجودة؟ هل هناك كمية محدودة أو كمية لا نهائية من اللا نهائيات؟ وإذا كانت لا نهائية.. ما نوعها؟

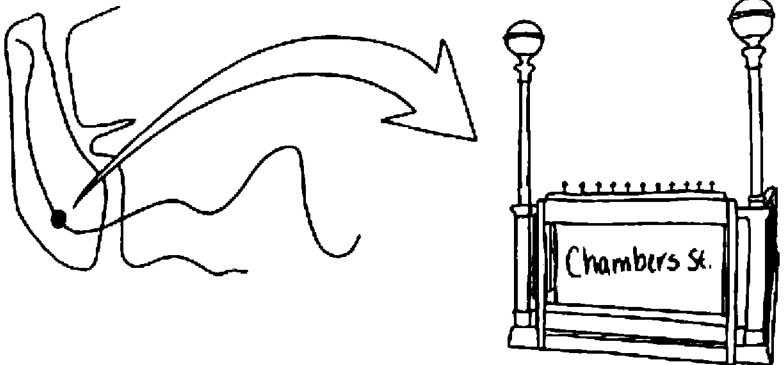
بعض هذه الأسئلة لها إجابات، والبعض الآخر ليس له إجابات، لقد تبيَّن أن السؤال الأول (ما إذا كان هناك شيء بين اللا نهاية والاستمرارية) هو الأغرب على الإطلاق، يبدو حقًّا كأنه سؤالٌ يمكن إجابته بنعم أو لا، يوجد أو لا يوجد، لكن شخصًا ما وجد الإجابة، وأثبت ذلك، وهي ليست نعم أو لا.

حقيقة غير معروفة: هناك حالة ثالثة أكثر أصالة بين الصواب والخطأ، لكن لا يمكنني إخباركم بها الآن.

الخرائط maps

يجب أن أكون واضحًا: معظم المحتوى في الفصلين الأخيرين غير مصنَّف تقنيًّا على أنه تحليل؛ إنه أشبه بمقدمة للتحليلات. يتعامل التحليل الفعلي مع اللا نهاية والاستمرارية بالطريقة التي يتعامل بها الصحفيون مع أحرف العلة والحروف الساكنة: إنهم موجودون، وعليك أن تعرف ماهيتهم وكيف يعملون، لكن هذا ليس محور التركيز في الحقيقة، يدور التحليل في الغالب حول الخرائط.

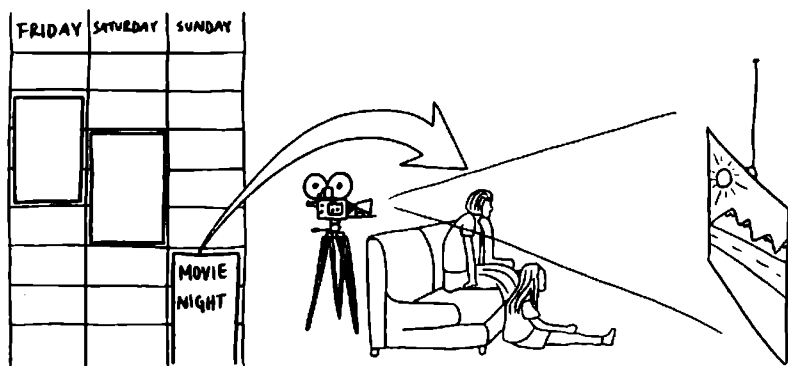
الخريطة، بالمعنى اليومي القياسي للكلمة، هي صورة تُفهم فيها النقاط أو الرموز على أنها تتوافق مع الأماكن والأشياء في العالم الحقيقي، إنها ليست مجرد علامات على قطعة من الورق، إنها مدن أو محطات مترو أنفاق أو مخرج حريق؛ ما يجعل الخريطة خريطة، وليس مجرد رسمٍ، هو دلالات خطوطها.



علاوة على ذلك، هناك قدرٌ كبيرٌ من المرونة فيما يتعلق بما يمكن أن تكون عليه الخريطة.

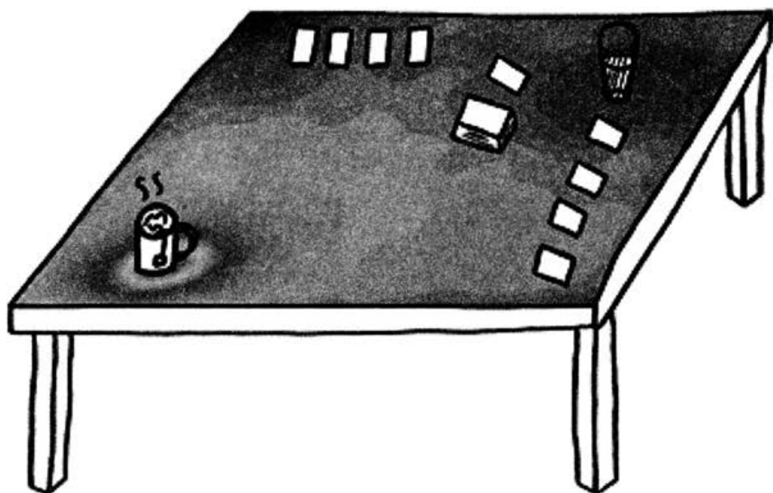
لا يجب أن يعكس شكل الخريطة الشكل المادي الفعلي لما تمثِّله، ما دام أن ما تطابقه لا يزال موجودًا.

ليس من الضروري أن تتوافق النقاط أو الرموز مع الأشياء أو الأماكن المادية، يمكنها الإشارة إلى الأوقات والأحداث والأسعار وأي شيء تقريبًا بشكل حقيقي، بالمعنى الأوسع لكلمة «خريطة»، ما عليك سوى تحديد الدلالات أو الشيء الذي تطابقه أو تعبِّر عنه الخريطة.

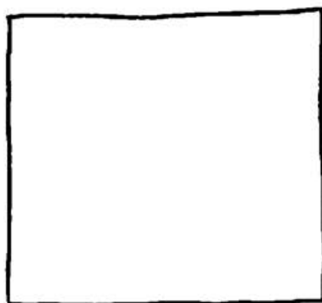


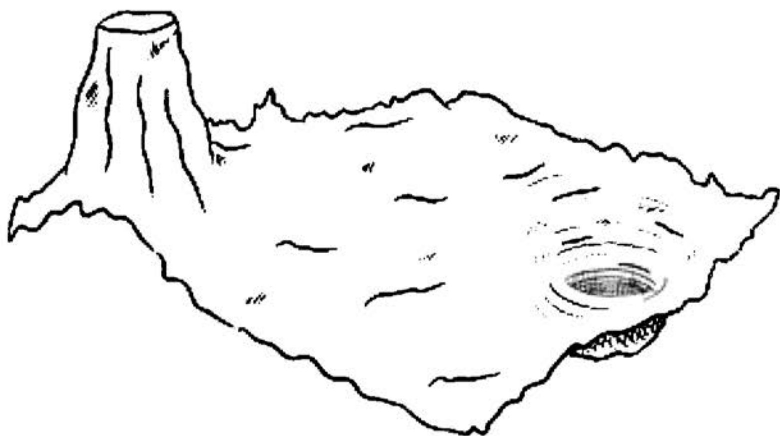
في معظم الخرائط اليومية، يوضع اسم معنى كل كائن مباشرة على الصورة. إذا كانت هناك نقطة تمثِّل بوينس آيرس، فاكتب «بوينس آيرس» بجوارها حتى يعرف الجميع ما دلالاتها. على الخرائط الأكثر تعقيدًا، ليس من السهل دائمًا القيام بذلك، إذا كنت تحاول تعيين معنى لمئات أو آلاف النقاط، فإن الأشياء تتشوش بسرعة، كتابة التسميات لن تكون مفيدة.

هناك طرق أخرى لرسم خرائط تعمل بشكلٍ أفضل إذا كان لديك كمية لا نهائية أو حتى مستمرة من المعلومات التي يجب إظهارها، على سبيل المثال، خريطة حرارية. انظر إلى طاولة أو جدار أو أي سطح مستوٍ، كل نقطة على هذا السطح لها درجة حرارة معينة، تختلف قليلًا من نقطة إلى أخرى، ولكن إذا كان لديك مقياس حرارة شديد الحساسية وقمت بضغطه مقابل أي نقطة عشوائية على السطح، فستحصل على قراءة رقمية دقيقة.



كيف يمكننا رسم خريطة لنقل معلومات درجة الحرارة هذه؟ لن يكون من العملي تسمية كل نقطة؛ فنحن هنا نتعامل مع سلسلة متصلة من النقاط، لذلك علينا أن نكون مبدعين.



يمكننا تكوين خريطة مرمزة بالألوان بحيث نحدد النقاط الأكثر سخونة بألوان أفتح.

يمكننا رسم خطوط كفافية contour تقسِّم المساحة إلى مناطق ذات درجة حرارة متساوية تقريبًا، أو يمكننا إضافة بُعدٍ إلى درجة الحرارة: النقاط الأكثر سخونة أعلى والنقاط الأكثر برودة أقل.

أيًّا كان الإصدار الذي تفضِّله، فإن هذه الخرائط جميعها تقدِّم نفس المعلومات الأساسية، ما تبحث عنه هو الدلالات بين المواقع

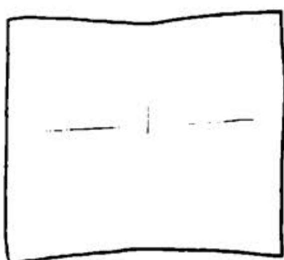
ودرجات الحرارة، يتم تعيين قيمة لكل نقطة على الجدول، يكتبها علماء الرياضيات على النحو التالي:

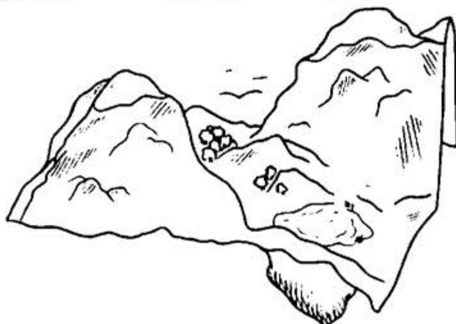
{درجات الحرارة} → {نقاط في الجدول} : الخريطة

يمكن استخدام أنماط الخرائط الثلاثة نفسها في مواقف أخرى أيضًا.

تحتاج خريطة المشي لمسافات طويلة الجيدة إلى إظهار كيف يتغير الارتفاع فوق المنطقة. إنها تشبه خريطة الحرارة تمامًا: كل نقطة على الخريطة تتوافق مع بعض القيم العددية، حتى نتمكن من ترميز معلومات الارتفاع بالألوان، ويمكننا رسم خطوط الكنتور (الكفافية)، أو يمكننا إضافة بُعدٍ ثالث (هنا تحتوي الخريطة ثلاثية الأبعاد على تفسير مادي حرفي).







عادةً تستخدم الخرائط الطبوجرافية مثل هذا النمط الكنتوري (الكفافي)، مع وضع الاسم على كل خط كفاف تشير إلى ارتفاعه فوق مستوى سطح البحر، لكن جميع الإصدارات الثلاثة تعرض نفس البيانات الأساسية.

{الارتفاع} ← {نقاط في منطقة} : الخريطة

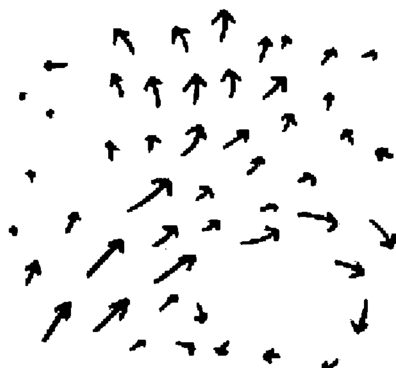
هناك سببٌ لاستخدام نفس أنماط الخريطة للخرائط الحرارية والخرائط الطبوجرافية. في كلتا الحالتين، نرسم الخرائط على سطح ثنائي الأبعاد باستخدام مقياس خطي. أي شيء له نفس البنية الأساسية سيعمل بنفس الطريقة، يمكنك إظهار المقياس الخطي بصريًا، مباشرة على السطح، بأي من هذه الطرق الثلاث.

يمكن تعيين أي قيمة مختلفة عبر منطقة ما على النحو التالي: هطول الأمطار السنوي، وعمق جسم مائي، وتركيز الملوثات، والكثافة السكانية، إلخ (ستشبه الخريطة ثلاثية الأبعاد للكثافة السكانية للمدينة الواقع كثيرًا، ستبدو وكأنها أفق المدينة المادي) في كل هذه المواقف، البيانات التي نهتم بها هي مدلولات النقاط في فضاء ثنائي الأبعاد ونقاط على استمرارية في بعد واحد، تبدو بنية البيانات العامة كما يلي:

خط ← المستوى : الخريطة

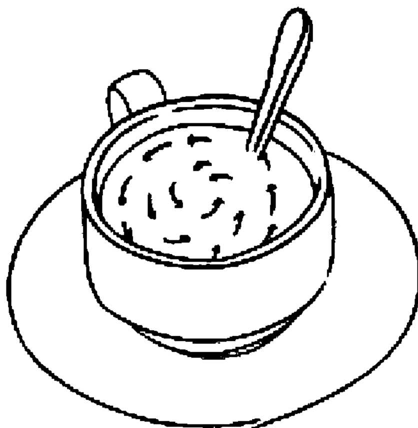
لكن الكثير من الأشياء التي قد ترغب في رسم خريطة لها لا تتناسب مع هذا النمط، وأنماط الخريطة هذه لن تكون مفيدة؛ لا يتناسب كل شيء مع التدرج الخطي كما تفعل درجة الحرارة والارتفاع.

مثل الريح، يحتاج خبراء الأرصاد الجوية إلى رسم خريطة للرياح، لكن «الرياح» في موقعٍ ووقتٍ معينين ليست مجرد كمية يمكن ترميزها بالألوان، للرياح سرعة، نعم، لكن لها اتجاهًا أيضًا. من الطرق الطبيعية لتقديم هذه المعلومات استخدام الأسهم، حيث يشير طول السهم إلى قوة الريح.



هذه هي الخريطة المتجهية vector، كل نقطة في الفضاء تتوافق مع اتجاه وقوة. تُعَد خرائط المتجهات مثالية لأي موقفٍ يتضمن مادة متدفقة، مثل الهواء الذي يتدفق لتكوين الرياح، توضح الأسهم اتجاه وسرعة التدفق عند كل نقطة.

في المرة القادمة التي تقلب فيها كوبًا من الشاي انتبه لتدفق السائل، ولاحظ ما إذا كان في إمكانك تخيل الخريطة المتجهية التي تقوم بإنشائها على السطح.

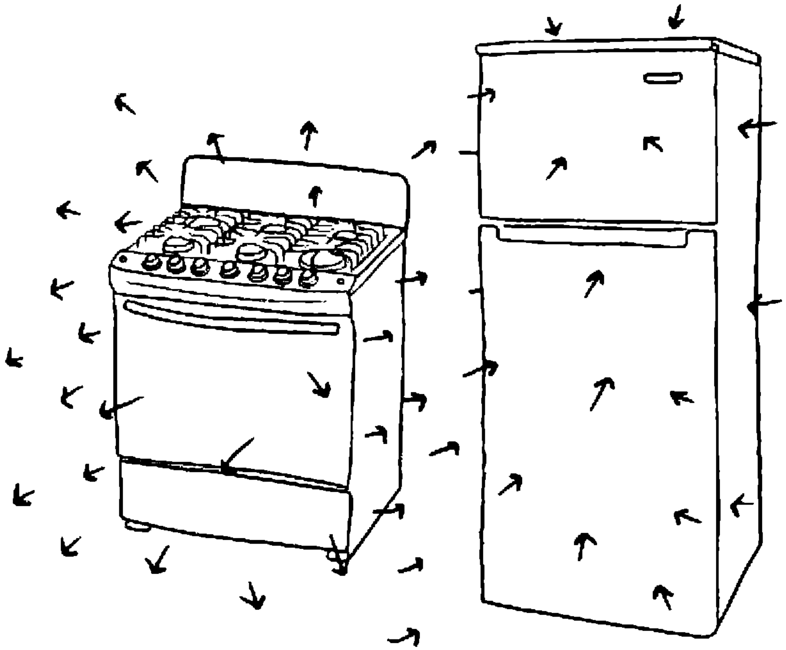


نحن محاطون (بالمعنى الحرفي للكلمة) بالمواد المتدفقة: الهواء من حولك يتغير باستمرارٍ ويتأرجح. عادة ما تكون غير مرئية للعين البشرية، ولكن إذا قمت بالزفير في الطقس البارد، أو نفث الدخان أو الفقاعات أو بذور الهندباء، يمكنك أن تحدد بإيجازٍ الخطوط العريضة لخريطة المتجه التي تنشئها أنفاسك.

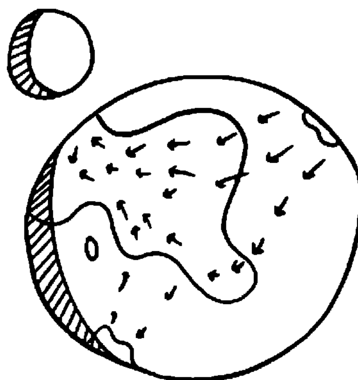


في هذه الحالة، يكون تدفقًا ثلاثي الأبعاد، حيث تتوافق كل نقطة في فضاء ثلاثي الأبعاد مع سرعة واتجاه.

يمكنك أيضًا تعيين تدفقات الأشياء الأخرى التي ليست مواد مادية كالهواء أو الشاي؛ إن التدفق الحراري أمرٌ يثير قلق المهندسين كثيرًا، ويقومون بتحليله باستخدام خرائط متجهية ثلاثية الأبعاد.



يمكن استخدام خرائط المتجهات لتحليل تدفقات السكان والموارد عبر العالم.



سيكون هذا تدفقًا كرويًّا، حيث تُعيَّن قيمة متجهية لكل نقطة على الكرة، يمكنك الحصول على خريطة على أي **متعدد شعب**.

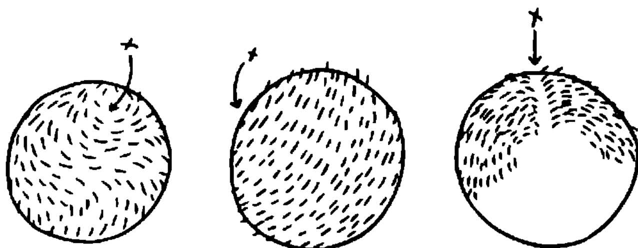
يميل المحترفون في التحليل إلى التخصص في نوعٍ واحدٍ من الخرائط. يتعامل «التحليل الحقيقي» مع الكميات الخطية مثل درجة الحرارة والارتفاع، بينما يهتم «التحليل المعقد» بخرائط المتجهات. يعرف المتخصصون في كل معسكر خصوصيات وعموميات هذا النوع: كيف تتصرف الخرائط، وما هو مشترك بينها، وما هي أنواع الأنماط والظواهر التي تظهر، بعد ذلك، عندما تظهر خرائط من هذا النوع في العالم الحقيقي، تكون جميع الحيل والتقنيات جاهزة للعمل.

هذه هي نتيجة التحليل أو أي نوعٍ من الرياضيات المجردة، يمكنك دراسة المفهوم العام لـ «التدفق» من دون الالتزام بأي مادة متدفقة معينة. إذا كنت محظوظًا، فستكتشف بعض الحقائق العامة حول خرائط المتجهات، التي تكون صحيحة في جميع الحالات، سواء كانت الهواء أو الشاي أو الحرارة أو مجرد تدفق مجرد على قطعة من الورق.

إليكَ حقيقة عامة في الخريطة: أي مادة متدفقة داخل حاوية صلبة[٤] لها نقطة ثابتة، وأعني بذلك نقطة لا تتحرك على الإطلاق، لذلك عندما تقلب كوبًا من الشاي، يمكنك دائمًا العثور على نقطة على سطح السائل لا تتحرك -حيث ستبقى ورقة الشاي في مكانها- وتدور حول نفسها، حيث يتحرك كل شيء حولها. وأي غرفة تتواجد فيها، بغض النظر عن عدد المراوح التي تشغلها، بها نقطة ما من الهواء الثابت حيث تحوم بقعة الغبار في مكانها (على افتراض أن النوافذ مغلقة).

تُسمَّى هذه الحقيقة «نظرية النقطة الثابتة» وقد ثبتت صحتها في كل بُعدٍ. هذا صحيح بالنسبة إلى السائل المتماوج في طبق ثنائي الأبعاد، وصحيح بالنسبة إلى الغاز المتماوج في زجاجة ثلاثية الأبعاد. إذا كنا نعيش في عالم يمكننا فيه بناء زجاجات ذات اثني عشر بعدًا وهزها، فسيكون هذا صحيحًا هناك أيضًا.

حقيقة ذات صلة بالخريطة: من المستحيل تمشيط كرة مصمتة مشعرة بشكلٍ مسطحٍ تمامًا. إذا حاولت أن تأخذ كل نقطة على كرة واخترت اتجاهًا لشعرها ليكون مسطحًا، فسوف ينتهي بك الأمر حتمًا بنقطة واحدة على الأقل من الانقطاع، تسمى المتفرد singularity أو القطب pole، حيث تحصل على جزء ذي شعر واقف أو جزء ذي بقعة صلعاء.



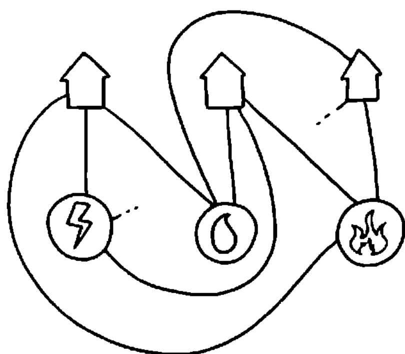
هذه الحقيقة لا تنطبق فقط على الشعر حرفيًّا، ولكن في أي وقتٍ تحاول فيه تحديد اتجاه لكل نقطة على الكرة. عبر سطح الأرض، هناك دائمًا مكانٌ واحدٌ على الأقل لا تهب فيه الرياح في أي اتجاه. في المحيطات، نجد المتفردات حيث لا يتدفق التيار في أي اتجاه، حيث تتجمَّع القمامة وتشكِّل جزرًا دوَّارة. حتى الكوكب المضطرب مثل كوكب المشتري يجب أن يكون له على الأقل «عين العاصفة» حيث يكون اتجاه التدفق غير محددٍ. هذا ليس مجرد نمطٍ مرصودٍ أو مصادفة للطبيعة، إنه ضرورة منطقية، صحيح حتى على الكواكب التي لن نتمكن من الوصول إليها لمليارات السنين، لكن هذا الأمر صحيح فقط بالنسبة إلى الكرات المفرغة؛ إذ يمكن تمشيط الطارة المشعرة بشكلٍ مسطحٍ تمامًا.

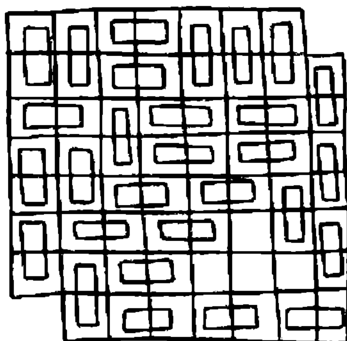
تُعَد الخرائط، بهذا المعنى الرياضي الأوسع، أداة متعددة الاستخدامات بشكلٍ لا يُصدَّق؛ تُستخدَم لتحليل الإسقاطات (مثل الظلال وخرائط العالم) والتحويلات (مثل التدوير والانعكاسات) والكميات التي تتغير مع الزمن والمنحنيات الهندسية وحالات الأنظمة المادية وغير ذلك. الدوال التي تقوم برسمها في المدرسة الثانوية هي شكل من أشكال الخريطة، يُنظر إلى «التمدد والضغط» للطوبولوجيا على أنها طريقة لرسم خريطة ذات شكل آخر. حتى المطابقات في الفصلين السابقين تمت دراستها كخرائط منفصلة، حيث «ترتبط» كائنات مجموعة واحدة بكائنات مجموعة أخرى، في أي موقف تقريبًا حين يتوافق شيء ما مع شيء آخر، يستخدم علماء الرياضيات الخريطة.

لأنك عندما تنظر إلى أشياء مجردة كهذه، وتنفض الغبار عن تفاصيل الموقف للتركيز على الديناميكيات الأساسية، تبدأ في إدراك أنه لا يوجد سوى العديد من الأنماط والهياكل المختلفة الموجودة، تسمى هذه الأنماط والتراكيب بالأشياء objects التي تتعامل معها الرياضيات، أما التفكير فيها يسمى الرياضيات.

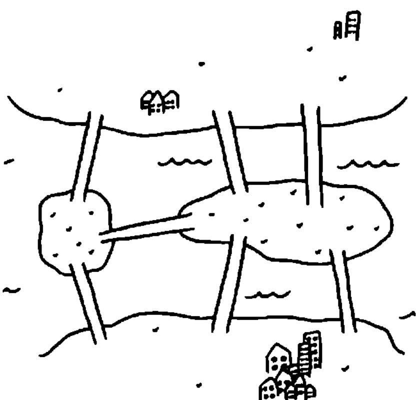
أشياء لا يمكن حدوثها

لا يمكنك ربط المنازل الثلاثة بالمرافق الثلاثة من دون تقاطعٍ للمسارات.





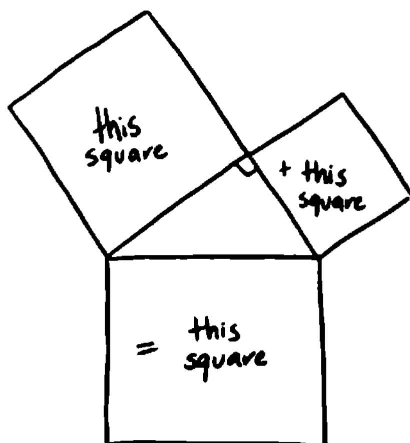
رقعة الشطرنج التي أزيلت جوانبها المعكوسة لا يمكن ملء سطحها (تبليطها) باستخدام قطع الدومينو.



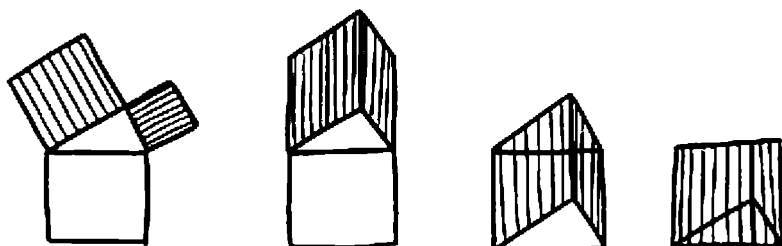
لا يمكنك عبور كل جسرٍ في مدينة Konigsberg القديمة من دون عبور الجسر مرتين.

(لكني أراهن أنك ستحاول على أي حال).

نظرية فيثاغورث



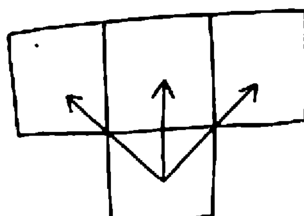
الإثبات



وهو المطلوب إثباته.

كيفية ملء شبكة المربعات في الصفحة التالية

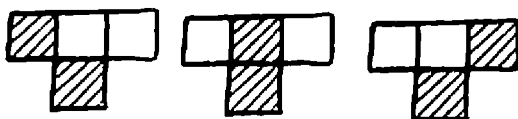
- اقلب الكتاب على جنبه بحيث يكون السهم على اليسار.
- تجاوز الصف المرمز بسهمٍ.
- لكل مربع، انظر إلى المربعات الثلاثة أعلاه.

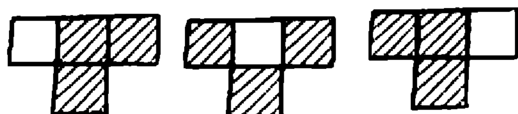


إذا كانت كلها ممتلئة أو كلها فارغة، فاتركها فارغة،

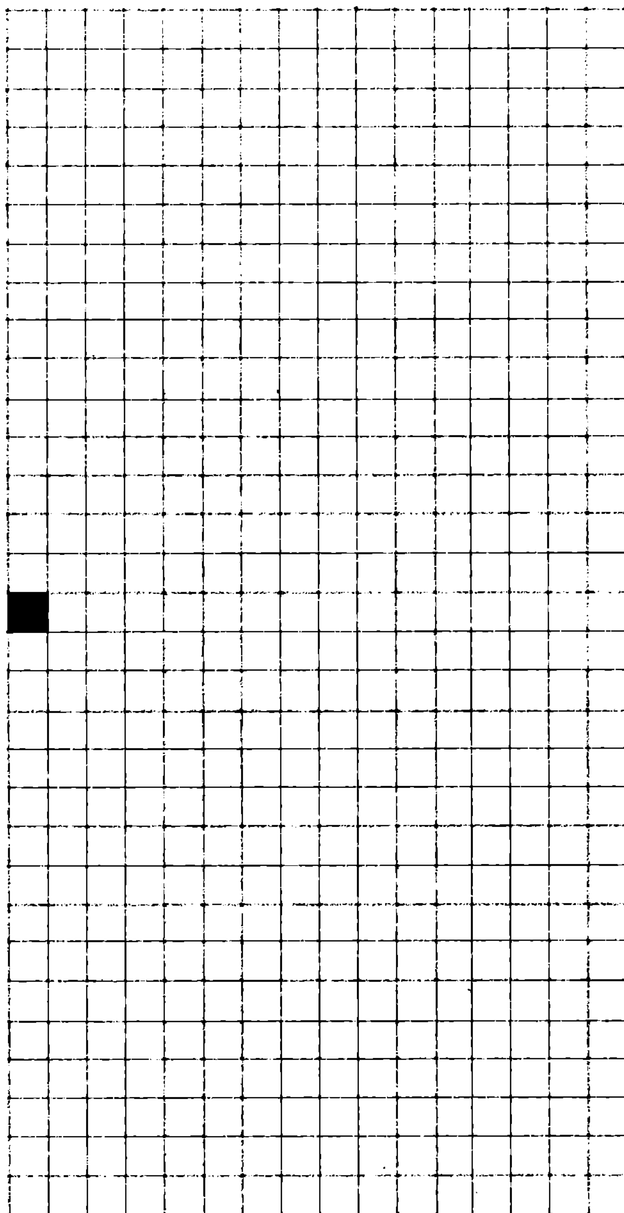


خلاف ذلك، املأها.





كرر ذلك للصف التالي ثم الذي يليه...

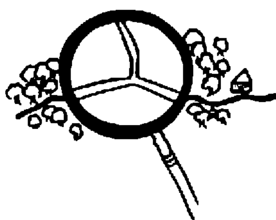


Algebra -الجبر

abstraction -التجريد

structures - الهياكل

inference -الاستدلال



التجريد- Abstraction

دعونا نبدأ تمامًا من الصفر. الرياضيات تدور حول أشياء مجردة نقية موجودة في الفراغ، والجبر هو أنقى الموضوعات وأكثرها تجريدًا على الإطلاق. نحن لا نتحدث عن الجبر الذي تتعلمه في المدرسة، يسمي علماء الرياضيات المتشددون ذلك «الجبر المدرسي» أو «الجبر الابتدائي»، وهم يقصدون الاستخفاف. ما أريد أن أخبركم عنه في هذا القسم يسمى «الجبر المجرد»، إنها مجردة جدًّا، ولا تتعلق حتى بأي نوعٍ معين من الأشياء، يتعلق الأمر بفكرة الأشياء والعلاقات بين الأشياء.

«الجبر المعمم» هو مصطلح آخر لِمَا نقصده، عندما تعمِّم شيئًا ما، فإنك تجعله أقل تحديدًا. لنفترض أن لديك مشكلة في الرياضيات مع الرقم أربعة، أربعة هو رقم محدد، إذا أردت تعميم المشكلة، فعليك استبدال x بالرقم أربعة، وهو عنصر ينوب عن أي رقم على الإطلاق. الآن لا يمكنك حل المشكلة بالطريقة المعتادة والحصول على إجابة عددية، ولكن يمكنك استبدال قيم مختلفة لـ x ومعرفة ما إذا كان هناك نمطٌ للإجابات التي تحصل عليها، عادة ما يكون موجودًا. هذا النمط هو الحل لمشكلة الرياضيات المعممة، إنه حلٌّ يعمل بشكلٍ عامٍّ.

يأخذ الجبر المجرد هذه الفكرة إلى المستوى التالي: يحاول العثور على نسخة أكثر عمومية من الجبر نفسه، بدلًا من الجمع أو الضرب، نستخدم الرمز • كعنصرٍ ينوب عن أي عملية على الإطلاق. نحن نستخدم عمليات حسابية مختلفة -ليس فقط العمليات التقليدية الأربع، ولكن العمليات الغريبة التي لم تُستخدم من قبل- ونبحث عن أنماط عالية المستوى. وبعد ذلك يزداد الأمر سوءًا: فنحن نتخلص من مفهوم العدد أيضًا، ونعمل الآن مع عمليات غير معروفة على أشياء غير معروفة.

من الصعب التحدث عن هذا النوع من الجبر، لأنه لا يوجد شيء معين للحديث عنه، هناك عمليات يقوم بها علماء الجبر، طرق منهجية لتحريك الرموز على الورق تحوِّل العبارات إلى عبارات أخرى. لكن كل عبارة لا تعني شيئًا في الواقع، أو على الأقل لا تعني شيئًا معينًا، كل رمز هو عنصر ينوب بشكلٍ عام عن مجموعة لا نهائية من البدائل الممكنة. إذن بمعنى ما، كل عبارة تعني مليون شيء مختلف دفعة واحدة.

إنه شعورٌ محيرٌ، لا توجد أرضية صلبة يمكن الوقوف عليها، ولا توجد نقطة مرجعية واضحة للعودة إلى الواقع أو حتى إلى ما يعتبره معظم الناس عادةً الرياضيات. يمكنك التحديق إلى صفحات كتاب الجبر ساعاتٍ، والتقليب ذهابًا وإيابًا لمحاولة تذكر ما يشير إليه أي شيء. عندما يظهر إثباتًا أو مثالًا أخيرًا، لا توجد عادة صورة محددة في رأسك بقدر الإحساس بالنمط. «حدث شيء ما هنا، ثم حدث شيء

متماثل هناك، لكن بشكلٍ معكوسٍ»، هناك علاقات وهياكل واضحة، لكن لا توجد أشياء فعلية.

من أجل التفكير في هذا النوع من الجبر، عليكَ أن تستخدم الذهنية الصحيحة، عليك أن تنسى أشياء من العالم الحقيقي مثل الأشجار والكراسي، وبعد ذلك عليك أيضًا أن تنسى أشياء في عالم الرياضيات مثل الأشكال والأرقام، عليك أن تفرغ عقلك، كما لو كنت تستعد لشكلٍ جامدٍ ومنظمٍ من التأمل.

لذا تخيل هذا، إذا كنت تستطيع. تخيل أنك لم ترَ شيئًا من قبل، أو تسمع شيئًا، أو تشعر، أو تشمّ، أو تتذوق، أو تشعر به أو تشعر بالحدس، أو تعلمت أو تعرفت على أي شيء على الإطلاق. تخيل أن عينيك مغلقة إلى الأبد، وفي الحقيقة ليس لديك أعين ولا تعرف ما هي الأعين، أنت مجرد وعي بلا جسدٍ يطفو في الفراغ.

ليس لديك ما تفكر فيه، لا شيء حرفيًّا: أنت لا تعرف أي شيء. إنه أمرٌ مملٌّ جدًّا، ليس لديك أي شيء للترفيه عنك، ولذا تجلس فارغًا تمامًا إلى الأبد.

وبعد ذلك تتلقى رسالة، يتم إدراجها مباشرة في ذهنك. (أخيرًا!) تقول، «شيء ما موجود». إنها رسالة أساسية للغاية، لكنك مسرور لوجود شيء تفكر فيه، شيء ما موجود، أنت لا تعرف ما هو، لكنك تعلم أن شيئًا ما موجود، ولذا يمكنك تسميته g.

عادة عندما تسمي شيئًا ما، يكون للاسم نوعٌ من الصلة بهذا الشيء، لكن ليس هنا، لا يوجد أصلٌ أو اتصالٌ، ومعرفة أن الشيء يسمَّى g

لا يخبرك بأي شيء على الإطلاق حول ماهية الشيء الذي يسمَّى g. إنه مجرد اسم، رمز تستخدمه لتسهيل الرجوع إليه. يمكنك أن تقول أشياء مثل، «g موجود»، لكن يمكنك رسم مخطط مفاهيمي لكل شيء تعرف أنه موجود في العالم.

•g

لكن لا تقرأها كثيرًا: الشيء ليس حرف g في الحقيقة، وهو ليس نقطة في الحقيقة، أنت فقط ترسم الفكرة المجردة للشيء الذي تسميه g.

إنك تشعر بالملل مرة أخرى الآن، لقد فعلت إلى حدٍّ كبيرٍ كلَّ ما يمكنك القيام به مع هذا الكائن الوحيد الذي تعرف أنه موجودٌ، واتضح أنه شيء عامٌّ واحدٌ ليس أكثر إثارة للاهتمام من عدم وجود أي شيء على الإطلاق، لذا تعود إلى الفراغ المطلق، متمنيًا أن يكون لديك إبهام للعبث، بضعة دهور أخرى.

ثم ولحُسن الحظ، عاد الرسول برسالة جديدة، «شيء آخر موجود» أخبار رائعة! تعطي هذا الشيء الجديد الاسم h وتقوم بتحديث الرسم التخطيطي الصغير الخاص بك.

•g

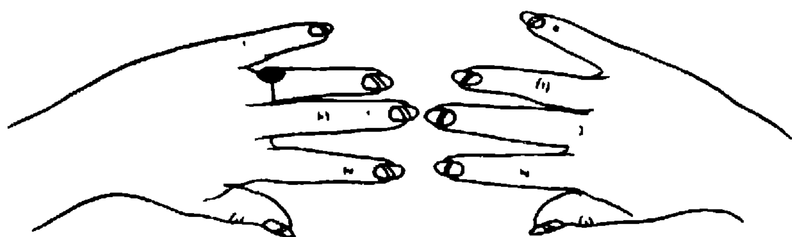
•h

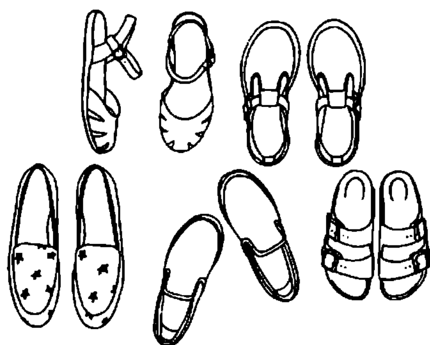
ولكن مرة أخرى، هذا كل ما يمكنك فعله.

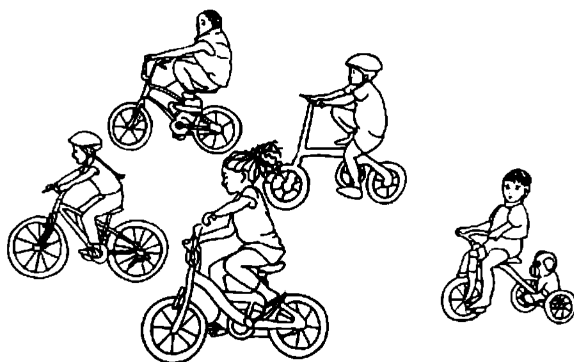
بغض النظر عن عدد الأشياء الجديدة التي تسمع عنها، كل ما ستتمكَّن من فعله هو إضافة أسماء جديدة إلى القائمة، وإضافة نقاط جديدة إلى مخطط النقاط، ثم العودة إلى العدم. إذا سألك أحدهم، «هل h موجود؟» يمكنك أن تقول له نعم، هو كذلك، لكنك ما زلت لا تعرف أي شيء يتجاوز بالضبط ما أخبرك به الرسول. لا يمكنك اكتشاف حقائق جديدة بنفسك، لا يمكنك طرح الأسئلة والتساؤل عن الإجابات. يتكوَّن العالم من قائمة من الأشياء غير ذات الصلة، وليس هناك الكثير الذي يمكنك القيام به حيال ذلك؛ ملل!

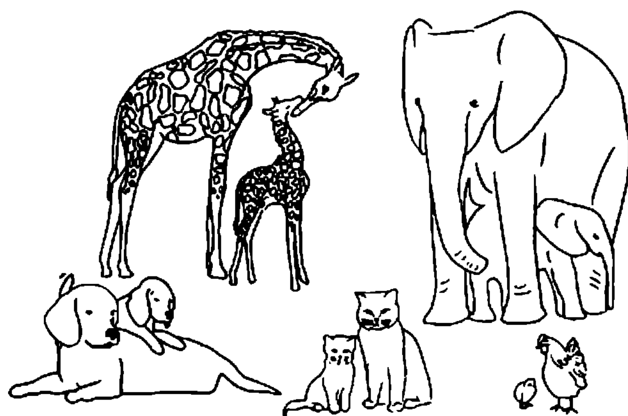
من أجل حدوث أي شيء مثير للاهتمام عن بُعدٍ، لا تحتاج فقط إلى معرفة ما إذا كانت الأشياء موجودة فقط، ولكن كيف تتناسب الأشياء بعضها مع بعض (أو ما هي علاقة الأشياء ببعضها البعض).

لذا افترض هذا، يعود الرسول ويعطيك رسالة بموضوعٍ جديدٍ، «هناك خمسة أشياء موجودة، وكل من هذه الأشياء الخمسة لها شريك موجود أيضًا» حسنًا، دعونا نفكر في ذلك، ماذا يمكن أن تصف هذه الرسالة؟









كل هذه المشاهد تناسب الوصف، لديهم جميعًا نمطٌ متشابه، على الرغم من اختلافهم إلى حدٍّ ما على السطح. في كل حالة هناك خمسة أزواج، أو عشرة أشياء مقسمة إلى مجموعتين بديلتين. المعلومات الإضافية التي تلقيتها هذه المرة، حول علاقة «الشريك-الشيء» هذه، تفرض نوعًا أساسيًّا من البنية في العالم، الأشياء الآن مترابطة وتتعايش.

لديهم شكلٌ أو ترتيبٌ شاملٌ، الكل هو أكثر من مجموعة من الأجزاء.

هذه خطوة في الاتجاه الصحيح، لأن العالم الحقيقي منظمٌ بشكلٍ كثيفٍ بالعلاقات بين الأشياء. توجد أريكة وسجادة، لكنهما غير موجودتين في الفراغ: الأريكة «فوق» السجادة، وهي «فوق» الأرضية، و«فوق» جيرانك في الطابق السفلي، وهكذا حتى تصل إلى لب الأرض المنصهر. عندما تتحدث عن شخصٍ ما، فربما لا تقول فقط «آدي موجود»، أنت تقول شيئًا مثل «آدي لديه أظافر طويلة»، أنت تصف علاقة «وجود» بين آدي وبعض الأظافر، وعلاقة «أن تكون أطول من» بين أظافر آدي وفئة مرجعية لأظافر أخرى. حتى مجرد قول «آدي شخص» يعني ضمنًا مجموعة كاملة من العلاقات، بين آدي وأجزاء الجسم المختلفة، والأشخاص الآخرين، والمواقع المادية، والأحداث، والعادات، والمعتقدات، والرغبات، إلخ. يتكوَّن فهمنا للعالم (على مستوى أساسي من التجريد، أرضية أولية للغاية) من الأشياء والعلاقات بين الأشياء.

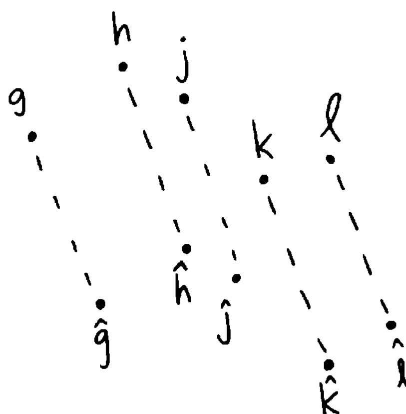
في عالم الرياضيات أيضًا، يمكن فهم كل ما نقوم به من خلال هذه العدسة الأساسية. في الطوبولوجيا، نظرنا إلى نوعٍ من الأشياء يسمى الأشكال، وعلاقة «التشابه» التي تنطبق على أي شكلين يمكن شدهما

وضغط أحدهما بالآخر. تنظم هذه العلاقة فوضى مختلطة من الأشكال في نظام تصنيف منظم. في التحليل، بالمثل، فرضت العلاقة «أكبر من» ترتيبًا على جميع مجموعات الأشياء، من تعريف الفراغ إلى اللا نهاية، والاستمرارية، وما بعدها.

لكنني قلت إننا نترك العالم الحقيقي وعالم الرياضيات وراءنا، لذلك دعونا ننسى كل ذلك الآن ونعود إلى وعيك العائم في الفراغ، وتلك الأشياء الخمسة الموجودة مع شركائهم الخمسة الموجودة أيضًا.

تريد تسمية الأشياء، وتريد عمل مخطط نقطي، لا يبدو من الصواب إعطاء عشرة أسماء مختلفة للأشياء، لأن ذلك لا يعكس ماهيتها. يمكنك، نظرًا إلى أن الأسماء لا تعني شيئًا في الحقيقة، ولكن لتسهيل الأمور عليك، يمكنك أيضًا اختيار الأسماء التي تعكس ترتيب العالم الذي تقوم بوصفه؛ نفس الشيء مع الرسم البياني النقطي.

يمكنك تشتيت النقاط بشكلٍ عشوائي، لكنك أفضل حالًا إذا أشرت إلى الأشياء وشريكتها.



هذا واحدٌ من أبسط العوالم الممكنة التي تحتوي على أي بنية منظمة، هذا جيدٌ، لأن علماء الرياضيات يحبون الأشياء بسيطة. هذه هي نقطة التجريد: فهي تتيح لنا التحقيق في طبيعة النظام والشكل، من دون أن نتورط في التفاصيل العشوائية لأي موقف معين.

إذن ما الذي نتعلمه بالضبط عن النظام والشكل؟ ما الذي يجعل هذا العالم المنظم، مع الأشياء وشريكتها، مختلفًا نوعيًّا عن مجموعة من الأشياء غير ذات الصلة؟

لسببٍ واحدٍ، يمكن التحدث عن هذا العالم بطريقة لم يكن بوسع العوالم السابقة التحدث عنها. يمكننا أن نقول، على سبيل المثال، «g هو الشيء وشريك لـ ĝ» و«h و j ليس أحدهما شريكًا للآخر» و«Ķ لديه شيء شريك ولكنه ليس g أو h أو شريكها». من قبل، من دون علاقات بين الأشياء، كل ما يمكننا قوله هو أن الأشياء موجودة، كما في العالم الحقيقي، العلاقات هي جوهر اللغة.

هذا يعني أيضًا أنه يمكننا طرح الأسئلة والبحث عن إجابات، مثل: «ما هو الشيء الشريك لـ g؟» أو، «هل هناك أي شيء ليس شريكًا للشيء الشريك له؟» من السهل الإجابة عن هذه الأسئلة، لأن العالم الذي نتعامل معه لا يزال لا يعاني من أي شيء، ولكن للمرة الأولى، نحن في موقف حيث يمكن أن تكون هناك أشياء لاكتشافها.

بالتراجع للحظة، فإن الفكرة الكبيرة وراء الجبر المجرد هي أن كل شيء نتعامل معه في الرياضيات هو في الأساس نسخة أكثر تعقيدًا من شريك العالم الأساسي. لديك بعض الأشياء، بعض العلاقات بين

الأشياء، بعض الأشياء التي نعرفها، بعض الأشياء التي لا نعرفها. علماء الجبر مقتنعون بأن أي سؤال رياضي يمكن تصوره يمكن ترجمته إلى مصطلحات جبرية مجردة وحلُّها باستخدام أدوات جبرية.

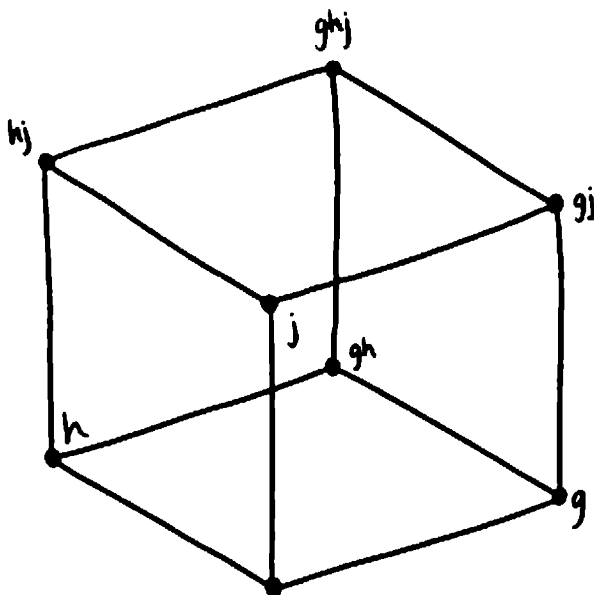
يمتد هذا الاعتقاد خارج الرياضيات أيضًا. لقد بنيت الكثير من الفلسفة الأكاديمية الغربية والعلوم حول فكرة أن كل شيء نتعامل معه، مرحليًّا، يمكن تجريده في صيغ رياضية بسيطة. إنها فكرة تبدو مجنونة، وربما تكون مجنونة وخاطئة في الواقع، لكنها في النهاية، أثبتت أنها فكرة قوية ساعدت الأشخاص على فهم طريقة عمل الطبيعة وبناء تقنيات جديدة.

نظرًا إلى أن مثال الشيء والشريك لا يزال أساسيًّا جدًّا بحيث لا يكون مثيرًا، أريد أن أعطي مثالًا آخر للعبة لهيكل مجرد. انسَ كل شيء تعرفه لمرة أخيرة، مستعد؟ ها هي رسالتك: «هناك ثلاثة أشياء خاصة، دعنا نسميها «wugs» كل مجموعة ممكنة من «wugs»هي أيضًا شيء موجود.

ماذا يمكن أن يصف الرسول؟ سيبدو نظام التسمية البسيط الذي يمكننا استخدامه كما يلي:

g h j gh hj gj ghj

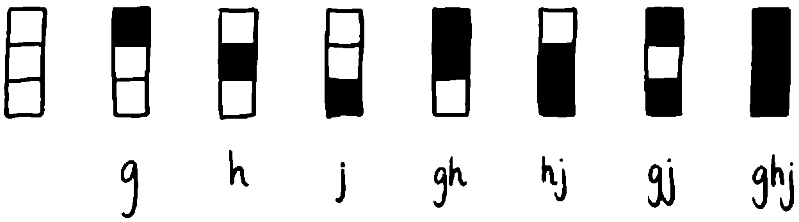
لكن كيف نرتب النقاط؟ ما هو التخطيط المرئي الذي يلتقِط هذه البنية؟ هناك العديد من الأشياء التي من شأنها أن تكون مفيدة، ولكن إليك فكرة جيدة: رؤوس مكعب.



خذ دقيقة لإلقاء نظرة على هذا المخطط وقدِّر سبب تمثيله لهيكل. يمثِّل الركن القريب الشيء الفارغ، هو مزيج من أشياء لا تنتمي إلى wugs. وبعد ذلك، كل شيء من الـ wugs يتوافق مع أحد الأبعاد الثلاثة، لإضافة أشياء من مجموعة wugs، تحرك في هذا الاتجاه.

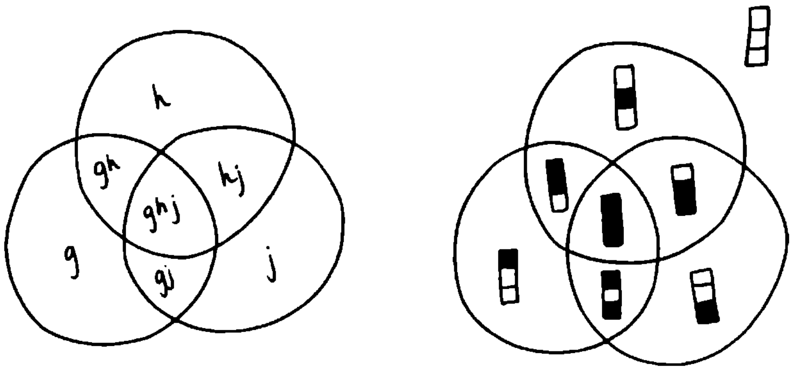
تحتوي المخططات الهيكلية مثل هذه دائمًا على تناظرات وأنماط لطيفة لها، ترى كيف أن الزوايا المقابلة للمكعب لها أسماء مقابلة؟ هذه علامة على أننا نصنع البنية الأساسية جيدًا.

هناك عالم آخر له نفس البنية بالضبط سيكون عبارة عن مجموعة من السلاسل ثنائية النظام المكونة من ثلاثة بتات bit، أي الحالات المحتملة لثلاثة مفاتيح تشغيل وإيقاف.



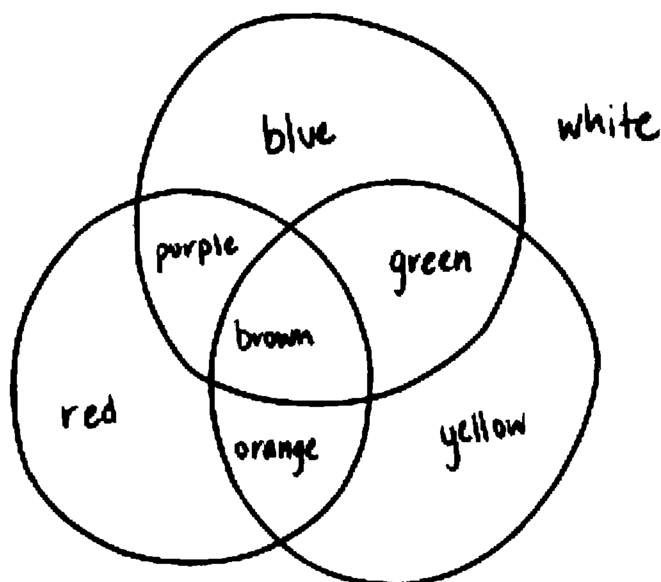
هنا الأشياء التي تنتمي إلى wugs هي المفاتيح، والشيء الفارغ الذي لا ينتمي إلى wugs هو الثلاثة مفاتيح التي في وضع الإغلاق.

عرض آخر لنفس الهيكل الأساسي: مخطط أشكال فن Venn ذي ثلاث دوائر.



نظام أخير يتناسب أيضًا مع هذا النمط نفسه: الألوان.

brown
green
orange
yellow
purple
blue
red
white



من الغريب أن معاملات رقم الثلاثين the factors of thirty تتناسب أيضًا مع نفس النمط بالضبط، سأريكم كيف يبدو ذلك (إنه أنيق جدًّا) لكنني وعدت أنني لن أستخدم أي أرقام، لذلك أعتقد أنه سيتعيَّن عليكم حل هذا الرقم بأنفسكم.

بغض النظر عن التفاصيل، فإن النقطة العامة التي أحاول توضيحها هنا هي: يمكن أن يظهر نفس الهيكل التجريدي الأساسي مثل أي عددٍ من الأنظمة المختلفة ظاهريًّا، تختلف الأشياء المحددة في كل حالة اختلافًا كبيرًا، لكنَّ العلاقات بينها هي نفسها تمامًا.

	wugs	combine	nothing	everything
ghj - world	letters	append		ghj
cube	dimensions	→↑	near corner	far corner
bit strings	positions	overlay		
venn diagram	circles	overlap	outside	center region
colors	primary colors	mix	white	brown
factors of thirty	primes	multiply	one	thirty

طريقة أخرى للتفكير في تكافؤ «نفس البنية المجردة»: أي جملة يمكنك قولها عن مجموعة واحدة من الأشياء تظل صحيحة عند ترجمتها كلمة بكلمة إلى أخرى.

$$g \cdot h = gh$$

red • blue = purple

هناك مصطلحٌ رياضي رسمي لهذا النوع من التكافؤ، لا يحتوي على ترجمة جيدة إلى اللغة الإنجليزية العادية (فضلًا عن العربية!). عندما يكون لنظامين نفس البنية المجردة، نقول إنهما متماثلان أحدهما للآخر iso ، isomorphic يعني «متساويًا» ويتحوَّل إلى «شكل shape» أو «تكوين form»، الألوان وسلاسل البت وزوايا المكعب كلها متشابهة، لها نفس الشكل المعبر عن المفهوم.

عندما تقرأ كلمة «متماثل isomorphic» في كتاب مدرسي، فمن المحتمل أن يكون المؤلف دقيقًا جدًّا في التعريف، ويصف نظامين لهما نفس البنية بالضبط، من دون أي اختلافات على الإطلاق. ولكن أيضًا، يطلقها علماء الرياضيات أحيانًا على الأشياء المتشابهة في الحياة الواقعية، ثم نعنيها عادةً بطريقة أكثر صرامة وانطباعية. قد تقول إن لعبة Uno متماثلة بالنسبة إلى لعبة Crazy Eights أو أن فيلم The Lion King متماثل بالنسبة إلى هاملت، على الرغم من أن هذا ليس صحيحًا بالمعنى الحرفي والرياضي.

بالنسبة إلى عالِم الجبر، فإن التماثل isomorphism –حالة كونه متماثلًا isomorphic– هو قمة الأناقة والجمال؛ موقفان غير مرتبطين بهما نفس الديناميكيات الأساسية سرًّا، هذا أمرٌ خلاب. لقد تم تبسيط العالم بدرجة واحدة، ما كان في السابق مشكلتين مختلفتين أو، حسب الحالة، مائة أو ما لا نهاية من المشكلات المختلفة، اختُزِل إلى مشكلة واحدة؛ لقد تعمَّق فهمنا (على الأقل، هذا هو انطباعي عن عالم الجبر).

لقد رأينا هذا النوع من عملية التجريد/ الاختزال قيد التنفيذ منذ عدة فصول؛ أنا فقط لم أسمِّها بذلك في ذلك الوقت. لنعُد إلى الخلف قليلًا، أو عُد إلى فندق اللا نهاية. يعد إضافة نزيل جديد إلى فندق كامل موقفًا يقدم البنية المجردة لـ «ما لا نهاية زائد واحد»، إن إضافة كائن جديد إلى حقيبة من الأشياء بلا قاعٍ هو نفس الشيء: ما لا نهاية زائد واحد، بمجرد أن تفهم ديناميكيات «اللا نهاية زائد واحد» في سيناريو واحد، فإن نفس المنطق ينطبق بالضبط على أي سيناريو متماثل.

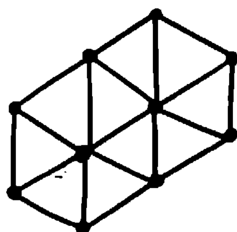
بعد كل شيء، فكِّر في الأمر: ماذا تعني «اللا نهاية» أو «واحد»؟ واحد ماذا؟ هذه الأفكار هي أفكار مجردة، بطة واحدة، شعرة واحدة، قطرة واحدة، دقيقة واحدة؛ ينطبق المفهوم على مليون حالة مختلفة، لكنه لا يعني أي شيء بمفرده، إنه مصطلح ينوب عن ظاهرة متكررة، إنه كائن مجرد، كائن رياضي خالص.

ما هو بالضبط «الشيء الرياضي الخالص؟» هل هذه الأشياء موجودة بالفعل أم أنها مجرد نسج من خيالنا؟ هذه أسئلة يجادل فيها فلاسفة الرياضيات. يعتقد بعض الناس أن الأشياء الرياضية موجودة،

بالمعنى الحرفي للكلمة، في عالمٍ بعيدٍ من التجريد الخالص. إنهم يعتقدون أننا نلتقط لمحاتٍ من هذا العالم الأبسط عندما ندرس الرياضيات. إنهم يعتقدون أن هذا الكون الرياضي الخالص، «العالم الأفلاطوني»، هو أكثر جوهرية وأجمل من عالمنا، وأقل عشوائية، وأقل تأثرًا بالمصادفة.

أنا لا أعرف كل ذلك، لكنها طريقة مفيدة للتفكير في الأشياء المجردة. مهما كان هيكل ghj (الأمثلة التي قُدِّمت منذ قليلٍ)، يمكننا أن نتخيله موجودًا في عـالم الرياضيات الفارغ، لا يمكننا أن نعرف كيف يبدو، تمامًا مثلما لا نستطيع معرفة كيف يبدو «واحدًا» خالصًا. يمكننا أن نرى كل هذه الظلال المختلفة التي تلقيها على عالمنا، المكعب، مخطط أشكال فين، إلخ، لكن الشيء الذي نتحدث عنه؟ هذا الهيكل العظمي للفكرة، هذا الشكل الجبري المجرد الذي أحاول إيصاله من رأسي إلى عقلك؟ هذا مجرد شيء، بنية، يمكننا تسميتها، ولذا نسميها (Z – ثنائية التكعيب Z-two-cubed).

نعم، بالطبع: مكَّننا علماء الرياضيات من مهمة العثور على كل بنية مجردة وتسميتها وتصنيفها.



الهياكل structures

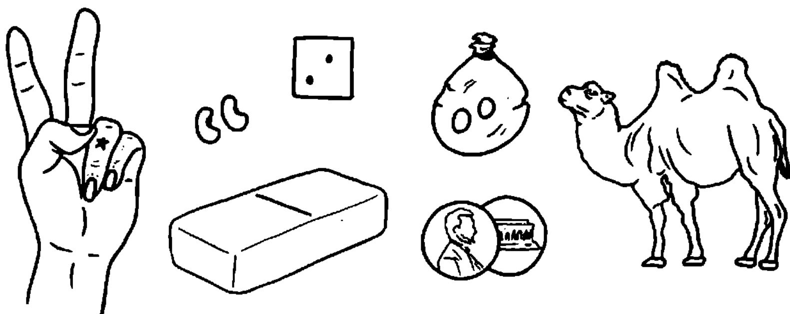
لا تقلق: لسنا على وشك الخوض في تصنيفٍ شاملٍ لجميع الهياكل المجردة الممكنة، من لديه الوقت؟ هناك الكثير منها، وهو أمر منطقي لأن «الهيكل» مفهومٌ واسعٌ للغاية. ليس الأمر كما لو كنَّا نصنِّف **متعددات الشعب**، بالترتيب حسب الأبعاد وتدوين بعض الأشكال في كل مرة. تصنيف الهياكل الجبرية هو مشروع أقرب في الشكل إلى تصنيف جميع أنواع الحياة على الأرض. يحدث ذلك في طبقات: هناك مجال المستوى الأعلى لـ «الهيكل»، ولكن بعد ذلك هناك عشرات أو نحو ذلك من فئات الهياكل المعروفة -المجالات، والحلقات، والمجموعات، والعقد، والزمرات، والرسوم البيانية، والشبكات، ونصف المجموعات، والمجموعات، والأحاديات، والماجما، والموديولات- ثم مجموعة كاملة نسميها بتكاسل الجبر. تحتوي كل فئة من هذه الفئات على فئات فرعية، التي لها فئات فرعية بدورها، إلخ، وهي يمكن تقسيمها إلى شرائح حسب خصائصها ومواصفاتها، إنه تصنيفٌ رائعٌ جدًّا.

لذا، مع عدم وجود هدف لإحصائهم جميعًا، أريد أن آخذ هذا الفصل لأظهر لكم عينة من الهياكل الموجودة. أنا أختار يدويًّا أنواع الهياكل التي تظهر غالبًا في البرية، ولكن يُرجى تذكُّر: لا يهتم علماء الرياضيات المحترفون بشكلٍ خاص بما هو شائع أو مفيد خارج الرياضيات؛ يدرس علماء الجبر الهياكل التي يجدونها مثيرة للاهتمام أو أنيقة، سواء كانت لديها أي مظاهر معروفة في عالمنا أم لا.

المجموعات Sets

المجموعة هي أبسط هيكل على الإطلاق، الأمر بسيط للغاية إلى درجة أن بعض الناس لا يعتبرونه هيكلًا، إنها مجموعة من العناصر، من دون علاقاتٍ أو خصائص أخرى.

فيما يلي مثالٌ على مجموعة، هذه المجموعة تسمى اثنين، لا يمكننا في الواقع النظر إلى المجموعة على (أنها كائن مجرد من دون شكلٍ محددٍ)، ولكن إليك العديد من سيناريوهات العالم الحقيقي مع هذه البنية أو الهيكل.



لا توجد طريقة «صحيحة» للنظر إلى مجموعة أو رسمها، لا توجد طريقة واحدة «صحيحة» للنظر إلى أي نوع من الهياكل.

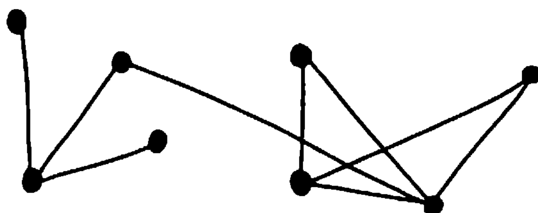
هذه المجموعة، اثنان، هي واحدة من العديد من المجموعات المختلفة الموجودة، من السهل جدًّا تصنيف المجموعات المحدودة، تتشابه كل مجموعة منتهية مع أي مما يلي:



المجموعات اللا نهائية أكثر تعقيدًا بعض الشيء، إذا أردنا عرضها بسهولة.

الرسم البياني Graphs

الرسم البياني مشابه للمجموعة، ولكن بهيكلٍ إضافي. في الرسم البياني، تتمتع بعض الكائنات بعلاقات خاصة بعضها مع بعض، يمكننا رسم الأشياء كنقاطٍ، والعلاقة كخطوطٍ بين النقاط.

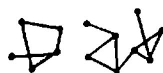
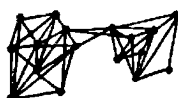
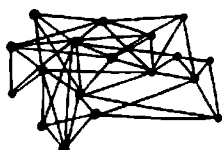


يمكنك النظر إلى هذا على أنه هيكل شبكة اجتماعية، حيث تمثل كل نقطة شخصًا وكل سطر عبارة عن صداقة. على الأقل، هذه هي الطريقة التي تُنظَّم بها الشبكات الاجتماعية على مواقع الويب مثل

Facebook أو LinkedIn، حيث تكون الصداقة ثنائية ودائمًا ما تسير في كلا الاتجاهين.

يمكنك أيضًا اختيار شيء أكثر دقة من «الصداقة» لرسم الروابط على هذا الرسم البياني، يمكنك ربط شخصين إذا تحدثا أحدهما مع الآخر في أثناء التواصل بالعين، يمكنك فقط ربط الأشخاص الذين تبادلوا القبل، يمكنك ربط شخصين فقط إذا تفاعلوا معًا على فيلم مدرج على موقع IMDb.

تتضمن الأسئلة الشائعة التي تطرح حول الرسوم البيانية ما يلي: ما مدى كثافة الترابط بينها؟ كيف تنقسم إلى مجموعات مختلفة؟ هل تُقطَّع إلى شكلين فرعيين من دون وصلات بينهما؟

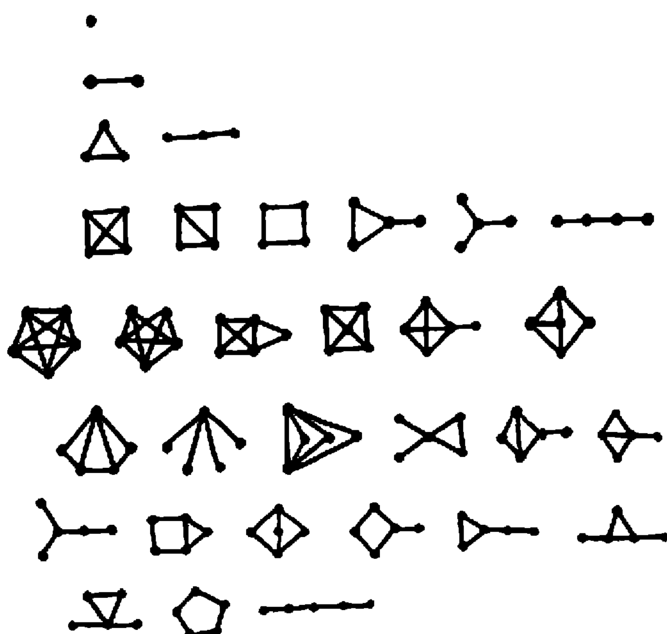




هل يمكن رسمها من دون تقاطع الخطوط؟ هل هناك أي نقاط وحيدة من دون أي وصلات؟ أي شيء لديه أكبر عدد من الاتصالات؟ أي شيء لديه أكثر اتصالات مكونة من خطوتين «صديق إلى صديق»؟ ما هي الأشياء الأكثر مركزية، والمعنى، وما هي أقل الخطوات بين كل الأشياء الأخرى؟

إذا كان صحيحًا أنك تبعد ست درجات على الأكثر من جميع الناس على الأرض، فهذا يعني أن «قطر» الرسم البياني الاجتماعي

البشري هو ستة. يمكنك أيضًا حساب «نصف القطر» من نقطة معينة، مثل قولك إن كل ممثل على بُعد أربع خطوات على الأكثر من كيفن بيكون (ممثل أمريكي من مواليد ٨ يوليو ١٩٥٨ حاصل على جائزة نقابة ممثلي الشاشة ١٩٩٥ كأفضل فريق ممثلين عن دورهم في فيلم أبولو ١٣، وظهر في العديد من الأفلام).

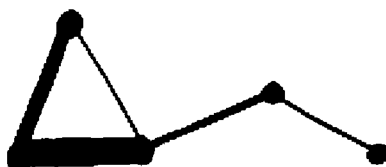
إليك بداية قائمة جميع الرسوم البيانية المتصلة الممكنة، بالترتيب حسب عدد النقاط:



الرسم البياني المرجح Weighted graphs

في الحياة الواقعية، قد تتخيل أن الصداقة ليست ثنائية بقدر ما هي سلسلة متصلة، بالنسبة إلى أي زوج من الأشخاص، يمكن أن تختلف

العلاقة بين صفر (لا توجد صداقة) ولا نهاية (لا ينفصلان)، يُعبَّر عن هذا باستخدام هيكل الرسم البياني المرجح.

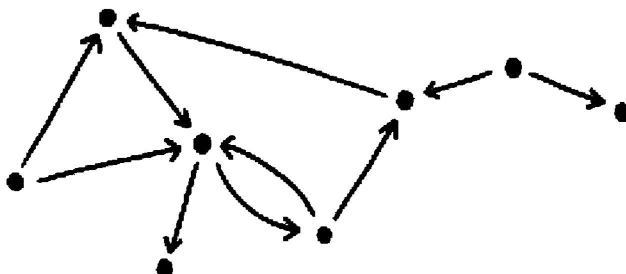


لا يمكنك البدء في سرد جميع الرسوم البيانية المرجحة الممكنة،

هناك سلسلة متصلة من الخيارات المختلفة، حتى بالنسبة إلى الرسم البياني المرجح لشخصين فقط.

الرسم البياني الموجه Directed graphs

الرسم البياني الموجه مشابه للرسم البياني، ولكن بدلًا من الخطوط المتماثلة توجد أسهم أحادية الاتجاه.

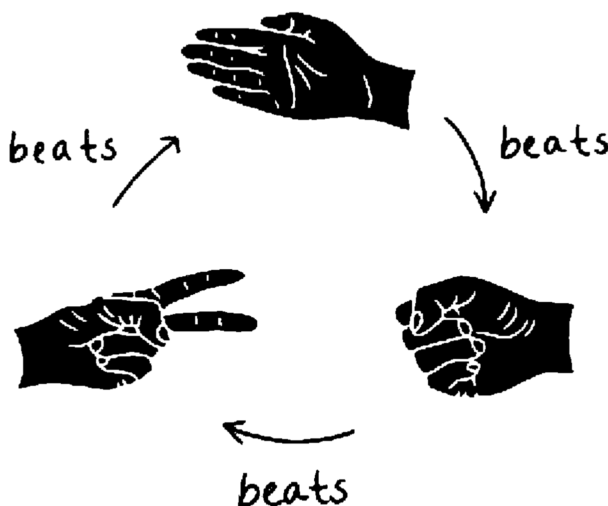


يشكِّل الأشخاص على Instagram أو Twitter رسمًا بيانيًّا موجهًا، لأنه يمكنك متابعة الأشخاص الذين لا يتابعونك.

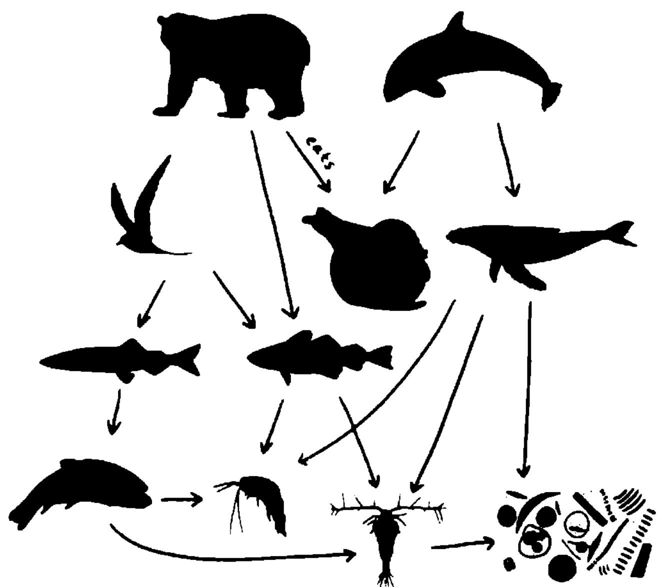
هيكل الإنترنت نفسه عبارة عن رسم بياني موجه، كل صفحة هي

نقطة على الرسم البياني، وكل سهم هو رابط من صفحة إلى أخرى. عندما تنقر من صفحة إلى أخرى، فأنت تتبع سلسلة من الأسهم. تستخدم معظم محركات البحث الحديثة نظرية الرسم البياني لفرز نتائج البحث التي تعرضها لك، مما يدفع الصفحات إلى الأعلى إذا كان لديها المزيد من الروابط التي تشير إليها. (يستخدمون أيضًا اعتبارات أخرى، مثل الإعلان ومدى تطابقه مع استعلام البحث الخاص بك).

يمكن أيضًا تصميم لعبة حجر-ورق-مقص على شكل رسم بياني موجه بثلاث نقط.



السؤال الشائع حول الرسوم البيانية الموجهة هو ما إذا كانت تحتوي على دورات: إذا اتبعت سلسلة من الأسهم، فهل سينتهي بك الأمر مرة أخرى من حيث بدأت؟ تحتوي لعبة حجر- ورق- مقص على دورة، في حين أن شبكة الغذاء النموذجية لا تحتوي عليها.



فيما يلي المجموعة الأولى من الرسوم البيانية الموجهة المتصلة:



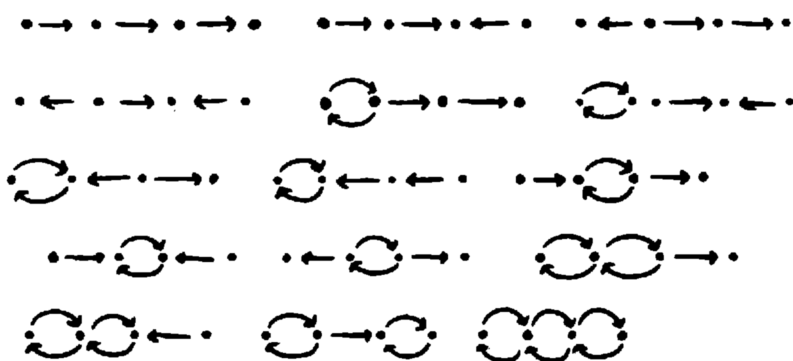






بعد ثلاث نقاط، ينفجر عدد الرسوم البيانية الموجهة بسرعة كبيرة،

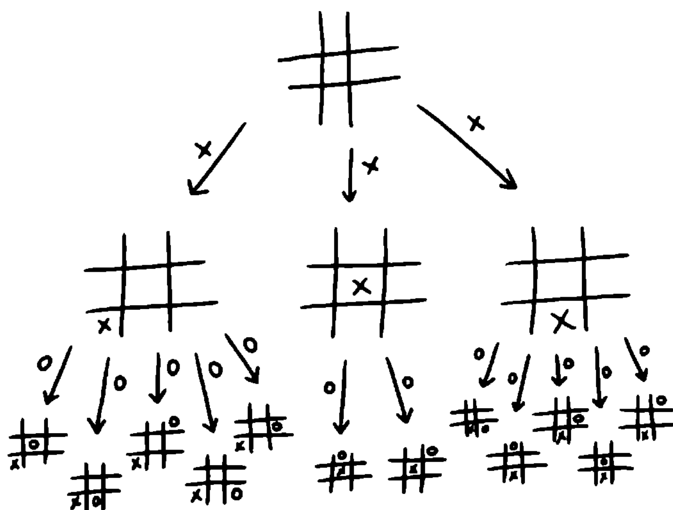
انظر إلى عدد الخيارات المميزة المتوفرة فقط لأربع نقاط مرتبة في سطرٍ:



شجرة اللعبة Game trees

هناك نوعٌ شائعٌ من الألعاب الثنائية (التي تدور بين لاعبين) يحب علماء الرياضيات التفكير فيها، تقع لعبة ضامة والشطرنج ولعبة إكس-أو وجو وكونيكت فور (الأربعة تربح) وريفيرسي، المعروفة أيضًا باسم عطيل، في هذه الفئة. هذه ألعاب من دون عناصر حظٍّ، حيث يتناوب لاعبان على اتخاذ الحركات، بمعلومات كاملة، وفي النهاية يفوز شخصٌ واحدٌ أو يكون التعادل، تسمى هذه الألعاب الاندماجية، ويمكن دراستها كنوعٍ من الهياكل.

دعونا نلقي نظرة على إكس-أو، كل موضع لوحة محتمل هو نقطة أو عقدة، وهناك نوعان من الأسهم: التحركات التي يمكن أن يقوم بها X، والحركات التي يمكن أن يقوم بها O.



باستخدام «شجرة اللعبة» هذه، يمكنك متابعة أي لعبة واحدة من لعبة إكس-أو كمسار أسفل الشجرة الذي يتناوب مع سهم X، وسهم O، وسهم X، وسهم O.

كل لعبة اندماجية -لعبة ضامة، الشطرنج، إلخ- يمكن تحويلها إلى شجرة لعبة مثل هذه.

شجرة اللعبة للعبة مثل جو، حيث توجد مئات الحركات القانونية في كل منعطف، سيكون من الجنون كتابتها فعليًّا على الورق، لكن أجهزة الكمبيوتر التي تمارس ألعاب الطاولة مبرمجة للبحث في أشجار اللعبة من أجل إيجاد إستراتيجيات جيدة.

أنت تعرف كيف أنه في لعبة إكس-أو، من الممكن دائمًا فرض التعادل، هل إذا لعب كلا اللاعبين بشكلٍ جيدٍ؟ هناك حقيقة مثيرة للاهتمام من نظرية الألعاب الاندماجية تقول إن كل لعبة اندماجية هي

على هذا النحو: إما أنها فوزٌ قسري للاعب واحد، وإما تعادلٌ قسري، إذا لعب كلا اللاعبين على النحو الأمثل، يتم تحديد اللعبة منذ البداية. من الناحية العملية، ما زلنا لا نعرف ما هي الإستراتيجية المثلى للألعاب المعقدة مثل الشطرنج أو لعبة جو، ولكن من الناحية النظرية، فإن كل لعبة ذات معلومات كاملة من دون حظ[٥] «قابلة للحل».

إثبات

خُذ أي لعبة اندماجية واكتب شجرة لعبتها الكاملة، دعونا نطلق على اللاعبين X وO، في أي موضع على اللوحة تنتهي فيه اللعبة، قم بتلوين تلك النقطة باللون الأخضر إذا فاز X، والأحمر إذا خسر X، والرمادي إذا كان التعادل.

يمكننا الآن تلوين باقي أجزاء الشجرة، وليس مواضع النهاية فقط. إذا كان هناك موضع يكون فيه دور X وكان هناك سهم X يشير إلى موضع أخضر (فوز)، فقم بتلوينه باللون الأخضر، لأن X يمكنه لعب حركة فائزة، إذا كانت جميع أسهم X تشير إلى مواضع حمراء (خاسرة)، فقم بتلوينها باللون الأحمر أيضًا. إذا كانت أسهم X تشير إلى كل من المواضع الحمراء (الخاسرة) والرمادية (التعادل)، فقم بتلوين العقدة باللون الرمادي، لأن X يمكنه اختيار التعادل.

حافظ على مواضع التلوين بهذه الطريقة، واصعد الشجرة حتى يتم تلوين كل النقاط.

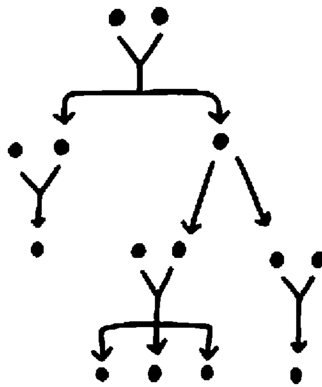
ما لون نقطة البداية؟ إذا كانت خضراء، يمكن أن يفرض X الفوز، إذا كانت حمراء، يمكن لـ O أن يفرض الفوز، إذا كانت باللون الرمادي، فإن اللعبة تعادل بأفضل طريقة.

وهو المطلوب إثباته

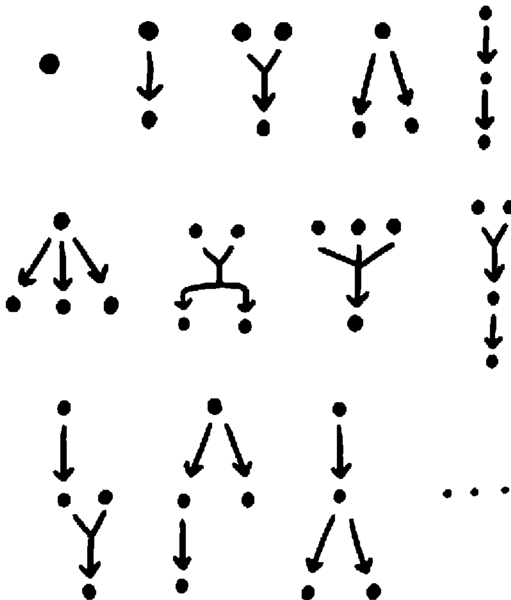
أمكن حل كل من لعبة الضاما وكونيكت فور، باستخدام أجهزة كمبيوتر قوية تبحث بشكلٍ شاملٍ في كل فرع من فروع شجرة اللعبة. (لعبة الضاما تنتهي بالتعادل إذا لعب كلا اللاعبين بشكل مثالي، وكونيكت فور تميل إلى فوز اللاعب الأول) ومع ذلك، من غير المحتمل أن يتمكَّن أي إنسان من حفظ الإستراتيجية المثالية لجميع المواقف الممكنة، لذلك لا تزال اللعبة ممتعة للتجربة. لم يتم حل لعبة الشطرنج وجو بعد، اقترح بعض لاعبي الشطرنج الكبار أن الشطرنج هو في النهاية تعادل إجباري إذا كنت تلعب اللعب المثالي.

شجرة العائلة Family trees

شجرة العائلة هي أيضًا بنية تشبه الرسم البياني، تتكوَّن من نقط ووصلات، ولكن الآن أصبح كل اتصال مثل سهم منقسم الطرف، مما يشير إلى «والدي» العلاقة.



يمكنك تحديد أن كل سهم أبوي يجب أن يكون له والدان بالضبط، أو يمكنك السماح لهياكل الأسرة الأخرى بالتداخل، وفيما يلي بعض الأشجار العائلية الأولى التي تسمح بوجود عددٍ كبيرٍ من الآباء.



سأقول هذا مرة أخرى، لأنه مهم: هذه الرسومات بالنقاط والسهم هي مجرد طريقة واحدة ملائمة لتمثيل الهياكل، الهياكل نفسها ليس لها شكلٌ أساسي، غالبًا ما يصف علماء الجبر التراكيب بلغة الرياضيات، من دون صور، مثل هذه الطريقة:

شجرة العائلة هي مجموعة S مجهزة بعلاقة أبوية:

$$\{(Pi, xi)\}$$

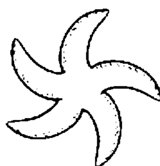
والتي تجمع بين مجموعات الوالدين $P \subseteq S$ والأطفال $x \in S$.

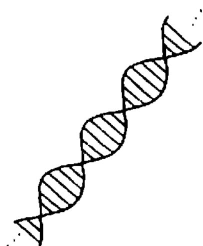
مجموعات التناظر Symmetry groups

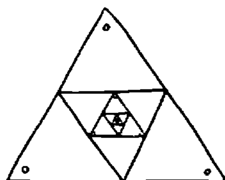
يجب أن أتحدث عن مجموعات التناظر لأن علماء الجبر مهووسون بالتناظر. علماء الفيزياء النظرية مهووسون بالتناظر أيضًا، وفي هذه الأيام، يتعين على العديد من علماء الفيزياء النظرية دراسة نظرية المجموعة بجانب دراستهم الأساسية، للتمرن على العمل باستخدام تناظرات مختلفة.

ربما لاحظت أن الأشكال والأنماط والأشياء المختلفة لها أشكال مختلفة من التناظر، هناك تناظر معكوس، تناظر دوراني، تناظر انتقالي، وتماثل متوسع.

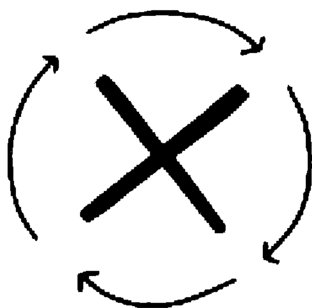


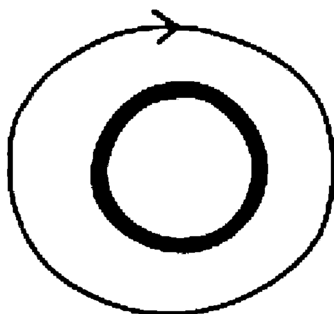




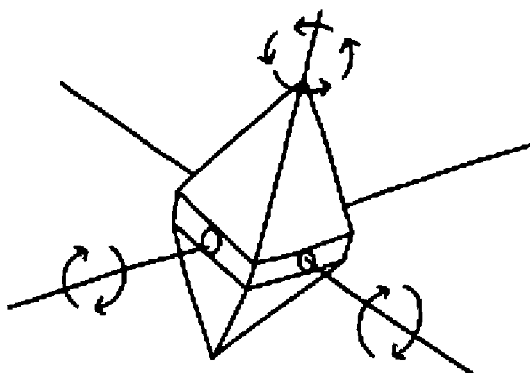


كل نوعٍ من هذه الأنواع من التناظر له العديد من الأنواع الفرعية المختلفة، على سبيل المثال، يمكن أن يكون التناظر الدوراني منفصلًا أو مستمرًّا:

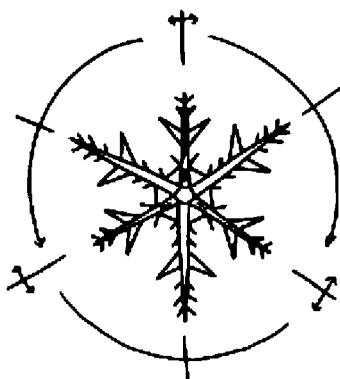




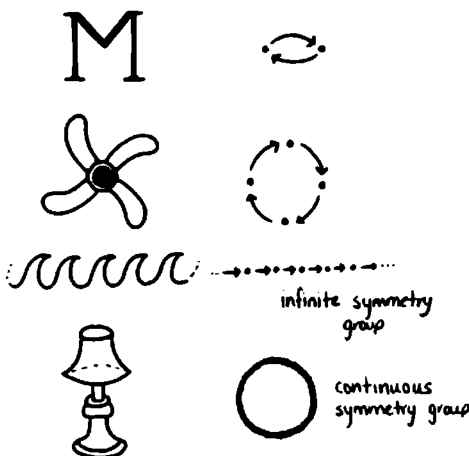
يمكن أن يكون للشيء أيضًا تناظر دوراني على طول محاور دوران متعددة.



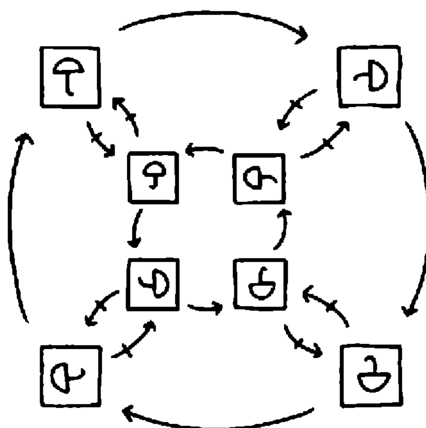
يمكنك أيضًا الحصول على التناظر الدوراني وأنواعٍ أخرى من التناظر في الوقت نفسه.



توصَّل منظِّرو المجموعة إلى طريقة منهجية لتمثيل كل نوع من أنواع التناظر كبنية جبرية، فيما يلي بعض الأمثلة على الأشكال مع مجموعات التماثل المقابلة لها:

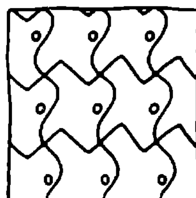
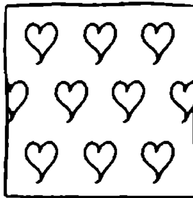
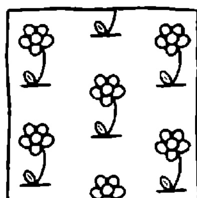


كل هذه الأمثلة لها نوع واحد من التناظر، هيكل المجموعة أكثر تعقيدًا قليلًا بالنسبة إلى الأشياء ذات أنواع متعددة من التناظر. على سبيل المثال، ها هي مجموعة التناظر لمربع، يحتوي على نوعين من الأسهم، أحدهما يشير إلى انعكاس يمين ويسار والآخر يشير إلى ربع دوران في اتجاه عقارب الساعة.

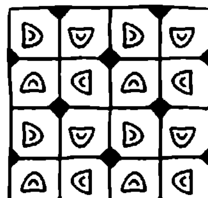
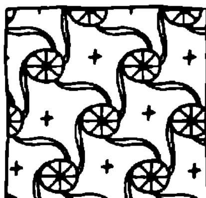
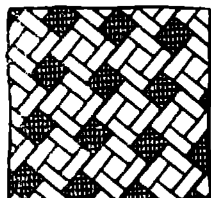


مجموعات ورق الحائط Wallpaper groups

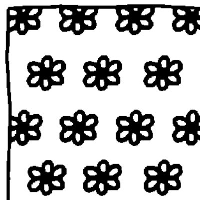
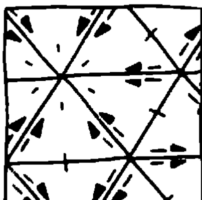
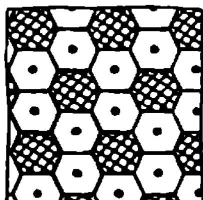
هذه الأخيرة هي فئة فرعية من مجموعات التماثل. يحتوي الشيء أو النمط على تناسق في ورق الحائط إذا كان من الممكن استخدامه في تغطية المستوى بأكمله بالفسيفساء، جميع هذه التصميمات لها تناسق في ورق الحائط ولكن لا يوجد أي شكل آخر من أشكال التناظر:

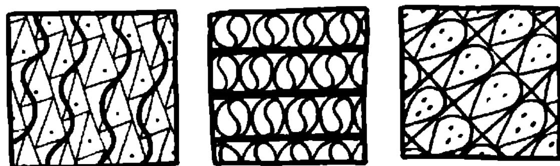
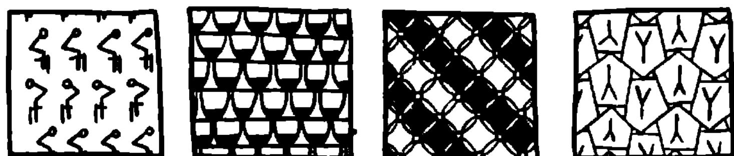
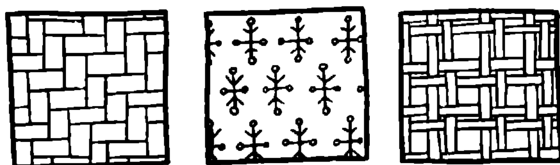
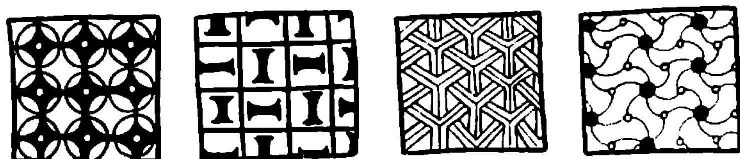
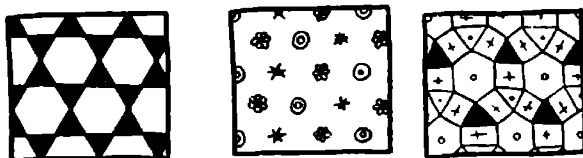
حيث إن هذه التصميمات لها تناظر في ورق الحائط وتماثل دوراني رباعي الجوانب:

وهذه التصميمات لها تناظرٌ في ورق الحائط، وتناظر انعكاسي، وتماثل دوراني سداسي الجوانب:

تقول نتيجة جميلة وفضولية للجبر التجريدي إن هناك بالضبط سبعة عشر نوعًا مختلفًا من تناظر ورق الحائط، إليك عينة واحدة من كل نوعٍ:

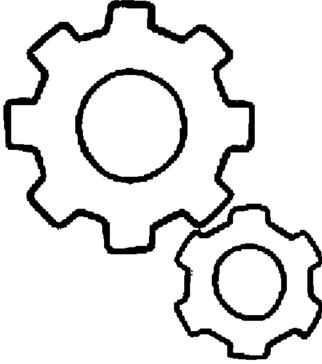






سأتوقف عن سرد الهياكل الآن، ولكن ضع في اعتبارك أن هناك العديد والعديد من الفئات غير المدرجة في هذه القائمة. يمكن استخدام الهياكل الجبرية لنمذجة أي شيء تقريبًا مع الأنماط والتنظيمات: بناء

الجملة الإنجليزية، والأكواد والتشفير، ونظرية الموسيقى، ومكعبات روبيك، والجناس الناقص، والجسيمات، وسلاسل التوريد، ومتعددات الحدود، والتلاعب، سمِّها ما شئت. يتم تخزين كل شيء على الكمبيوتر أو الهاتف في الذاكرة كـ «هيكل للبيانات»، نوع آخر من الأشياء الجبرية.

حتى إن هناك فرع ما بعد الجبر meta branch of algebra يسمى نظرية الفئة، الذي يدرس فئات الهياكل، ويبحث عن الأنماط والعلاقات بين كل هذه الفئات.

بعد كل شيء، فإن البنية الجبرية هي مجرد مجموعة من الأشياء المترابطة، إنها أداة متعددة الاستخدامات، هذا هو السبب في أن العديد من علماء الجبر مقتنعون أنه يمكنك تمثيل أي شيء في الكون كنوعٍ من البنية المجردة (إذا أردت ذلك).



الاستدلال - Inference

بالعودة إلى العالم الحقيقي لمدة دقيقة، تخيل مدينة، تخيل مليون شخص يقضون أيامهم ويتفاعل بعضهم مع بعض، ما هي أنواع العلاقات الموجودة؟ ما هو هيكل هذه الشبكة من الناس؟ الأمر ليس بسيطًا، لا تقترب أي من الهياكل التي عرضتها عليكم من هذا المستوى من الفروق الدقيقة. تخيل جميع العبارات الحقيقية التي يمكن أن تدلي بها عن الناس في مدينة: «تشي لديه أبناء عمومة في فرنسا»، «ذهب ديب وماكس في رحلة نهاية الأسبوع معًا في أكتوبر الماضي» نحن بعيدون جدًّا عن «أحمر • أزرق = بنفسجي».

نحن نعيش داخل الهياكل، إنها معقدة للغاية بحيث لا يمكن تحليلها بدقة جبرية، لكنها هياكل، ما تأكله، والمكان الذي تنام فيه، ومن تحب: توجد هذه الحقائق داخل شبكات الثقة المحلية والإقليمية والعالمية، والتجارة، والسلطة، والعمل، والإكراه، والتقاليد، والمساءلة، إلخ. لا نحتاج إلى أن نعرف كيف يمكن بالضبط ضم كل هذا في صفحة

واحدة، وكيف تبدو جميع الأسهم والنقاط، للحصول على مستوى من نظامٍ واحدٍ كبيرٍ من الأجزاء المترابطة.

يختلف التواجد داخل هيكلٍ بشكلٍ كبيرٍ عن النظر إلى هيكل مرسوم على قطعة من الورق. من الخارج، كل شيء معروف، يمكنك رؤية كل الأشياء وكل العلاقات بين الأشياء في وقت واحد، هنا في الأسفل داخل النظام، يمكننا فقط رؤية أجزاء صغيرة. نحن نعرف أشياء عن الأشخاص الذين نتفاعل معهم، ونحصل على تلميحات حول ما يحدث خارج شبكاتنا القريبة، هذا كل ما في الأمر.

من نقطة البداية هذه للمعلومات المحدودة، تمكنا من معرفة الكثير عن العالم، نلتقط الأنماط ونملأ الفراغات؛ نحن نستخدم البديهة والمنطق لاستغلال المقتطفات الصغيرة في معرفة جديدة ومفيدة، كيف نفعل ذلك؟

كيف يعمل الاستدلال؟

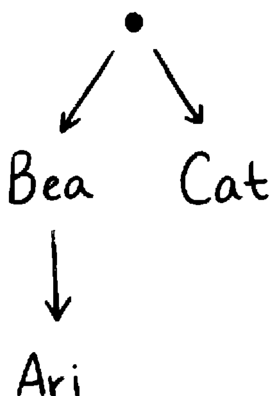
نحن نستنتج باستمرارٍ، ولكن الأمر يستحق التراجع قليلًا لتقدير كيف هو إنجاز رائع. مثلًا خذ شيئًا تعرفه -شيئًا قيل لك، أو شيئًا يمكنك رؤيته بنفسك- وقم بتحريكه بطريقة سحرية في رأسك وتحويله إلى شيء جديد تعرفه الآن أيضًا. ترى لافتة شارع واحدة وفجأة تعرف الاتجاه الذي تواجهه وكيفية الوصول إلى المتنزه. لقد قيل لك إن مستويات سطح البحر آخذة في الارتفاع، والآن تعلم أيضًا أن الناس على الجزر في خطر، كلما كان النظام أكثر تعقيدًا، كان الاستنتاج بطلاقة أكثر إثارة للإعجاب.

ما الذي يحدث ميكانيكيًّا عندما تنتقل من حقيقة إلى أخرى كهذه؟ متى يمكنك تكوين استنتاجات بأمان، ومتى تقفز بطريق الخطأ إلى استنتاجات غير صحيحة؟

يدرس علماء الرياضيات الاستدلال من منطلق الاهتمام والتطبيق العملي: ربما إذا تمكَّنا من تحويل هذه العملية إلى علم، فسنقدر على إضفاء الطابع الرسمي عليها والتعامل معها أوتوماتيكيًّا. سنكون قادرين على تعلُّم كل ما يمكن معرفته عن النظام فقط عن طريق إدخال بعض الحقائق الأساسية والضغط على زر «استنتاج»، (على الأقل، هذا ما نحلم به).

لسوء الحظ، فإن العالم الحقيقي معقدٌ ويصعب تنظيمه، هناك الكثير مما يحدث ولا توجد قواعد واضحة، إذن ماذا نفعل؟ نلجأ إلى التجريد! نحن نفترض طريقة وأسلوبًا أبسط للعالم، ونبحث في كيفية عمل الاستدلال في هذا العالم. من خلال جس النبض واختبار نجاعة الفكرة مع مجموعة من السيناريوهات المبسطة، يمكننا التعرف على كيفية تكوين الاستدلال في الحالة العامة.

دعنا نخوض المغامرة، ما هو النظام البسيط الذي يمكننا تكوين استنتاجات عنه؟ من الجيد أننا أمضينا الفصل الأخير في استعراض الأمثلة تلو الأخرى عن الهياكل الأساسية، يمكننا استخدام واحد منها، لنستخدم شجرة العائلة، كيف نكون الاستدلال عندما يكون النظام الذي تفكر فيه عبارة عن شجرة عائلة؟



Bea is Ari's parent

cat is Bea's sister

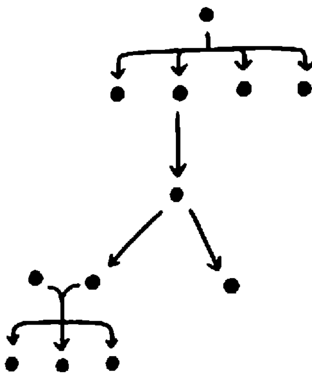
∴

Cat is Ari's aunt

لنفترض أني أخبرك، «بيا هي والدة آري»، وقد سمعت بالفعل أن «كات هي أخت بيا»، بناءً على ذلك، يمكنك الاستنتاج: يجب أن تكون كات خالة آري.

يتعلق هذا الاستنتاج الخاص بآري وبيا، وكات، ولكن من الواضح أن نفس نمط الاستدلال سينطبق في حالات أخرى، إذا كان لدى بيا طفلٌ آخر يُدعى زي، فأنت تعلم أن كات هي خالة زي أيضًا.

إذا كان لدى والدة كات أخت، فإن كات لديها خالة، عبر جميع أشجار العائلة التي يمكن تصورها، هناك قاعدة عامة للاستدلال حول الخالات التي يمكن الاحتفاظ بها دائمًا.



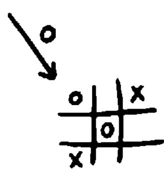
Inference Rule ∴

The sister of x's parent is x's aunt.

بالتأكيد، قد يبدو من المبالغة تسمية هذه «القاعدة»، ليس الأمر كما لو كنت مضطرًّا إلى الرجوع إلى بعض كتيبات القواعد الرسمية متى أردت تحديد الخالات والعمات، على الأرجح، ستعرف بشكل حدسي أن كات هي عمة آري.

هدفنا هنا ليس أن نفهم حرفيًّا كيف تفكر أدمغة البشر في الأنظمة، هذه مشكلة علماء النفس وعلماء الأعصاب، ينصب اهتمامنا على الاستنتاجات نفسها: نريد أن نعرف أنواع الاستدلالات الصحيحة، بغض النظر عمن يقوم بالاستنتاج وكيف. تخبرك قاعدة الاستدلال بالمنطق المتأصل في النظام، في أي وقت من اليوم، وفي أي حالة ذهنية، تكون أخت الوالدين عمة أو خالة.

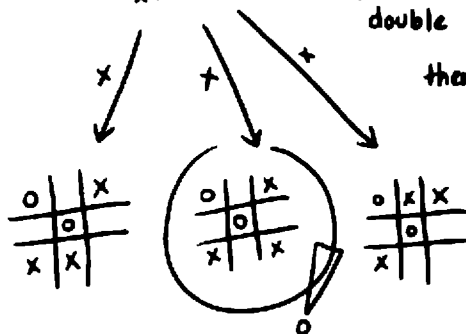
مثال العمة بالكاد يبدو كأنه استنتاجٌ، لذلك دعونا نجرب هيكلًا آخر من الفصل الأخير: شجرة اللعبة. إذا أدركت أن القيام بحركة معينة في لعبة إكس-أو سيسمح لخصمك بإنشاء تهديد مزدوج، فأنت تتعلم ألَّا تقوم بهذه الحركة؛ هذا استنتاج، يخضع لقاعدة الاستدلال.



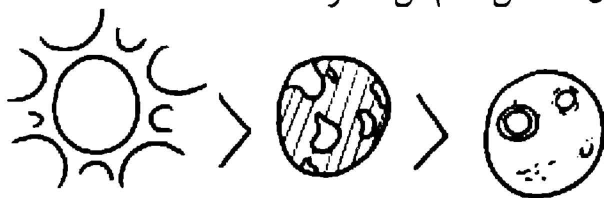
Inference Rule

If a move m allows your opponent to create a double threat,

then m is a bad move.



مثال آخر بسيط للغاية: مجموعة مرتبة، إذا كنت تعلم أن الشمس أقدم من الأرض وأن الأرض أقدم من القمر، فأنت تعلم أيضًا، بطبيعة الحال، أن الشمس أقدم من القمر.



Inference Rule

If $a > b$
and $b > c$,
then $a > c$

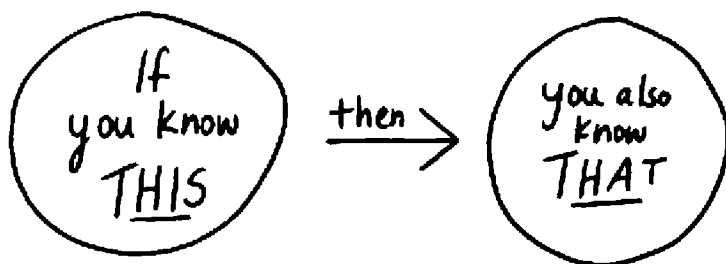
(لم أقم بتضمين المجموعات المرتبة في كتالوج الهياكل الخاص بنا في الفصل الأخير، لكنه مفهوم بديهي جدًّا، أليس كذلك؟).

في كل هذه الأنظمة الأولية، نفكر وفقًا لقواعد الاستدلال، يسمح النظام بأنماطٍ معينة من الاستنتاج، ويمكننا تدوين هذه الأنماط كقواعد استدلال.

كل نظام لديه مجموعة خاصة به من قواعد الاستدلال، مما يعكس هيكلًا معينًا للمعرفة في هذا النظام. عندما تفكر في لعبة الضامة، فأنت بالضرورة ستتبع مجموعة مختلفة من قواعد الاستدلال عما إذا كنت تفكر في التنقل أو الحركات الاجتماعية. الأمثلة التي نتعامل معها في الرياضيات دائمًا ما تكون عارية ومبسَّطة، ولكن يمكنك أن تتخيل أنه حتى نظام العالم الواقعي الأكثر تعقيدًا قد يكون له منطقٌ متسقٌ يمكن كتابته كقواعد للاستدلال.

في جميع الأنظمة يبدو الشكل الأساسي لقاعدة الاستدلال..

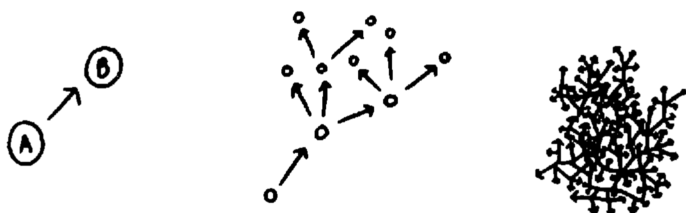
شيئًا ما مثل هذا:



قواعد الاستدلال مسألة بسيطة ولكنها قوية للغاية.

بمجرد تدوين قائمة قواعد الاستدلال لنظامٍ ما، تكون قد عثرت على مفتاح لإلغاء تأمين مخابئ جديدة للمعرفة؛ إنه تفاعل متسلسل:

تستخدم A لاستنتاج B، ثم تستخدم B لاستنتاج C، ثم D، وE... قد تجد بعد ذلك أن A وD صحيحان في وقتٍ واحدٍ يستلزم أن تكون بعض العبارات P الأخرى صحيحة أيضًا، مما يؤدي إلى سلسلة جديدة من الاستدلالات، التي تتحد وتتضاعف مع أشياء أخرى تعرفها. الآن عندما يخبرك شخص ما بحقيقة جديدة واحدة، يحدث الانفجار، وتتفرع إلى شبكة كثيفة من الحقائق المترابطة.

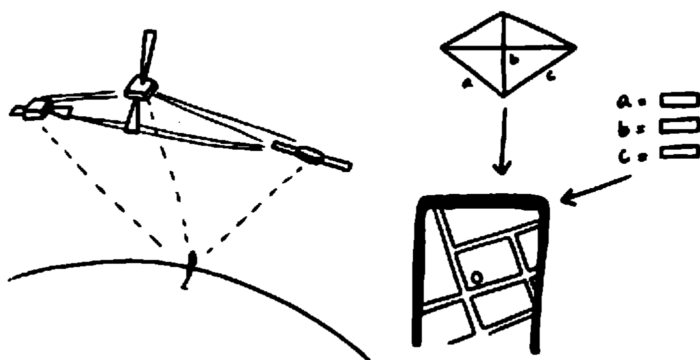


يرقى الكثير من الجبر -الجبر المجرد بالإضافة إلى الجبر المدرسي- إلى التطبيق الدقيق لقواعد الاستدلال الصارمة. فكر في مسألة الجبر المدرسي حين يتعيَّن عليك حل معادلة من أجل إيجاد قيمة x يعطونك تعبيرًا جبريًّا لتبدأ به، الذي يمثِّل بعض الحقائق حول النظام. ثم تبدأ في تطبيق قواعد الاستدلال: «إذا كان هذا صحيحًا، فسيظل صحيحًا عندما أضيف واحدًا إلى كلا الجانبين».

كل خطوة هي استنتاج أساسي وبطريقة ما، في نهاية العملية، يا للسعادة، تكون قد تعلمت ما هي x.

أحيانًا تكون x تساوي x فقط. في واجب الجبر المنزلي هذا، لن يكون هناك أي معنى أعلى للنتيجة النهائية، لذلك يمكن أن تشعر كأنها

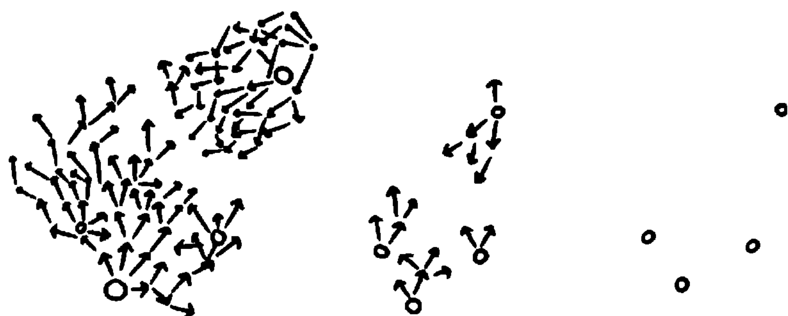
حمولة كاملة من لا شيء. ولكن يمكن أيضًا استخدام نفس إجراءات الاستدلال الصحيحة هذه في سيناريوهات الحياة الواقعية، وهي تنجح حقًّا في إنتاج معلومات جديدة ومفيدة. GPS الخاص بك، هو مثال واحد فقط من بين الملايين، يقيس المسافة إلى ثلاثة أقمار صناعية ثم يستخدم قواعد الاستدلال الهندسي لاستنتاج موقعك الدقيق:



عالمنا اليوم مشبعٌ بعمليات الاستنتاج الصارمة والمنهجية هذه. إنهم في أجهزتنا، يتنبأون بالطقس ويصدرون تحذيرات السلامة، ويديرون شبكات النقل والشبكات التجارية والبرامج الحكومية. تستخدم الشركات الجبر لتحقيق أقصى قدرٍ من الأرباح ويستخدم المعلنون الخوارزميات للتنبؤ (بدقة شديدة) بما نرغب في شرائه. استخدم الفيزيائيون النظريون الجبر المجرد للتنبؤ بوجود جسيمات دون ذرية تُسمَّى الكواركات، التي تأكدت لاحقًا في التجارب، وهو ليس شيئًا جديدًا فقط: فقد استخدمت معظم ثقافات العالم أنظمة مماثلة للاستدلال الرسمي عبر التاريخ للتنبؤ بحركات النجوم في السماء.

قد أذهب إلى حد القول إن علماء الرياضيات يحبون فكرة قواعد الاستدلال الصحيح أكثر من اللازم، أعني، ليس من الصعب معرفة السبب. نواة صغيرة من الحقائق يمكن أن تنفجر في شبكة كثيفة من المعرفة؟ مدهش! تخيل كل ما يمكنك اكتشافه بمجرد الجلوس بالورقة والقلم! يمكنك تعلم حقائق جديدة عن الكون من خلال اتباع القواعد وتحريك الرموز، يبدو الأمر كما لو كانت تتضاعف وتعلمك طبيعة الواقع.

لكن في مكان ما على طول الطريق، أدمن الناس هذه الفكرة وتركوا الأمور تخرج عن السيطرة. بدأوا تشغيلها في الاتجاه المعاكس، لقد اعتقدوا: إذا حوَّلت قواعد الاستدلال المعرفة الأقل إلى مزيدٍ من المعرفة، فربما يمكنك أخذ أي مجموعة من الحقائق وتقليلها مرة أخرى إلى جوهرٍ صغيرٍ من الحقائق الأساسية التي تنطوي على كل شيء آخر.



في الأنظمة الرياضية البسيطة، يبدو أن خدعة التخفيض هذه ممكنة، على سبيل المثال، تمكَّن علماء الرياضيات من اختزال جميع الحقائق الحسابية في العبارات الخمسة التالية:

Zero is a number.

•

If x is a number.
the successor of x is a number.

•

Zero is not the successor of a number.

•

Two numbers with the same successor
are the same number.

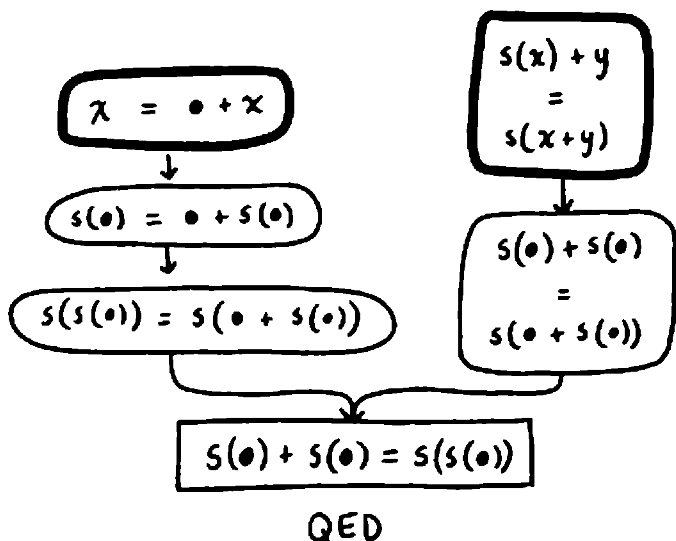
•

If a set S contains zero,
and S contains the successor of every number in S,
then S contains every number.

هذا يُسمَّى نظام البديهة[٦]، كل ما يمكنك معرفته عن كل عددٍ صحيحٍ، عن الضرب والأعداد الأولية وكل ذلك، يمكن (نظريًّا) استنتاجه من هذه البديهيات الخمس، إنها حزمة بداية موجزة وأنيقة للحساب. يمكنك التبختر والقول، «أنا أعرف هذه الأشياء الخمسة البسيطة، وبالتالي فأنا أعرف كل شيء يمكن معرفته عن الحساب»؛ إنه شعورٌ قوي، مثل بناء الكون عن طريق فرك بعض العصي معًا.

من الناحية العملية، لن تستخدم هذه البديهيات الخمس لإثبات شيء جديد، حتى الحقائق الحسابية الأساسية يصعب إثباتها بشكل صعب إذا كان عليك أن تبدأ على طول الطريق من البديهيات، من دون

استخدام أي معرفة أخرى على الإطلاق، أعني، انظر إلى مدى صعوبة إثبات أن واحدًا زائد واحد هو اثنان:



يسمى هذا النوع من الإثبات بالإثبات الرسمي. تبدأ من البديهيات، ولا يُسمح لك إلا باستخدام قواعد الاستدلال، لا يمكنك الاعتماد على الحدس، فقط قواعد الاستدلال. نعم، يمكنك استخدام الحقائق التي أثبتت مسبقًا من البديهيات، ولكن يجب أن يرتبط كل شيء في النهاية بالبديهيات. الهدف من هذا النوع من الإثبات ليس أن يكون مقنعًا بالمعنى الخطابي -البراهين الرسمية بالكاد يمكن قراءتها في معظم الأوقات!- ولكن لتحديد ادعائك ضمن هذا النظام الصارم والدقيق للحقائق المقبولة.

هذا موضوع مثير للجدل في مجتمع الرياضيات، إلى أي مدى يجب أن نستخدم البراهين الرسمية؟ يعتقد الناس عمومًا أنهم أكثر

جدارة بالثقة من الأنواع البديهية غير الرسمية للحجج التي استخدمناها في هذا الكتاب، إنهم يتبعون قواعد صارمة، لذا فهم ليسوا عرضة للخطأ البشري. لكن الكثير من الناس، وخاصة الطلاب، يجدونها مربكة ومثيرة للاشمئزاز، يقرؤونها كلغة أجنبية، غالبًا ما تقدم بإيجازٍ قدر الإمكان، من دون توضيح سبب أخذ كل خطوة أو ماهية الحجة الكلية.

أيًا كان الجانب الذي ستأخذه، هناك شيء واحد واضح: لقد استحوذت البراهين الرسمية على الأمر، لا يزال هناك مجالٌ للحدس في الفصول الدراسية والأماكن غير الرسمية، ولكن البراهين في الكتب المدرسية ودوريات الرياضيات تميل إلى الجانب الرسمي. هم لا يبدؤون حرفيًّا من البديهيات، لكن من المفترض أن يعودوا إلى الوراء. كان هناك جهدٌ منسقٌ في الرياضيات الأكاديمية، على مدى القرن الماضي أو نحو ذلك، لإضفاء البديهية وإضفاء الطابع الرسمي على المجال.

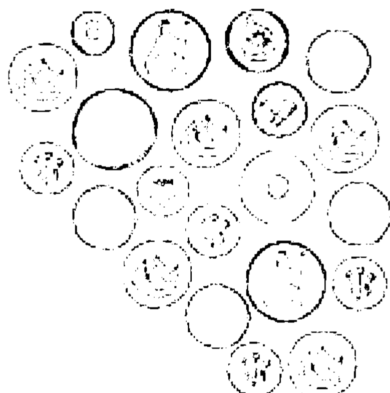
الى أي نهاية؟ إذا نجحنا في إضفاء الطابع الرسمي على كل دليلٍ، فماذا سيفيدنا ذلك؟ ربما يجعلنا أكثر يقينًا من نظرياتنا، ربما يعطينا نظرة ثاقبة على بنية وطبيعة الحقيقة، ربما يساعدنا في برمجة أجهزة الكمبيوتر لإنشاء أدلة جديدة، ربما، بتحويل البراهين إلى أشياء رياضية، يتيح لنا إثبات النظريات حول البرهان نفسه، ربما يكون ذلك ممتعًا من الناحية الجمالية.

هناك شيء واحد، رغم ذلك، أن الأشكال الرسمية لن تفهمنا، لن تسمح لنا بتقسيم العالم إلى «إثبات ما هو صحيح» و«إثبات ما هو

الخطأ». كان هذا دافعًا كبيرًا إلى التحول الأصلي نحو الشكليات: اعتقد الناس أنه سيعطينا طريقة منهجية وموضوعية لتحديد ما إذا كانت أي عبارة صحيحة أم خاطئة، ثم انهار هذا الأمل بشكلٍ كبيرٍ ودائمٍ.

هل تذكرون عندما أخبرتكم أن هناك حالة ثالثة أقل شهرة بين الصواب والخطأ؟ الآن أنا على استعدادٍ لإخباركم بذلك.

اثنين من ألعاب الرياضيات



«لعبة العملة المعدنية»

← ضـع بعض العمـلات المعدنية على الطاولة.

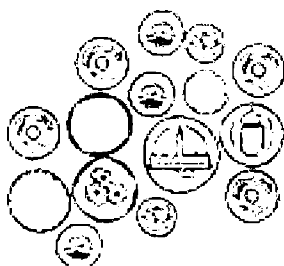
← لاعبان يتناوبان اللعب.

← حينما يحين دورك، خذ عملة أو عملتين.

← من يأخذ آخر عملة يفوز.

صعوبة العثور على الإستراتيجية الفائزة: سهلة- متوسطة

«الجراء والقطط»



← تبدأ بكومة من أحجام مختلفة.

← لاعبان يتناوبان اللعب.

← حينما يحين دورك أمامك خياران:

a. خذ أي عدد من العملات المعدنية من كومة واحدة.

b. خذ نفس عدد العملات من كلا الكومتين.

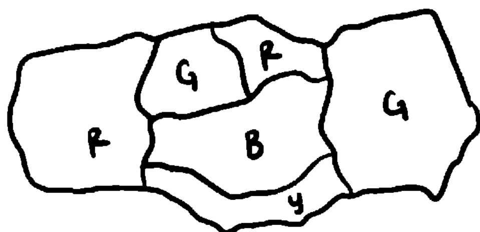


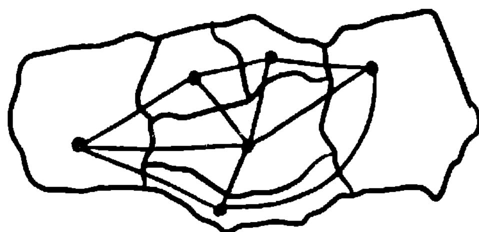
← من يأخذ آخر عملة يفوز.

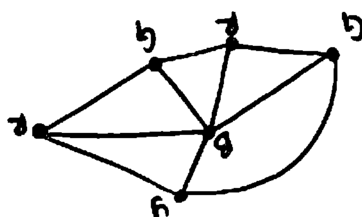
صعوبة العثور على الإستراتيجية الفائزة: متوسطة- صعبة

نظرية الألوان الأربعة

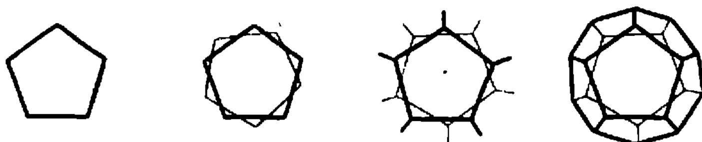
يمكن تلوين كل خريطة بأربعة ألوان بحيث لا توجد دول مجاورة لها نفس اللون.





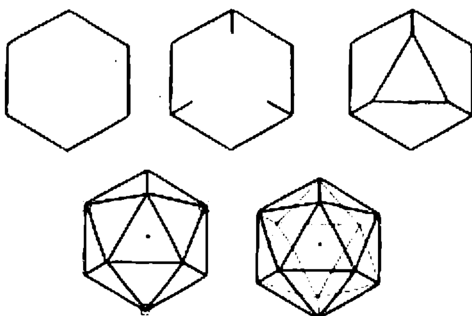


كيفية رسم الجسم ذي الاثني عشر وجهًا Dodecahedron



- ارسم خماسيًّا متساويًا من جميع الجوانب والزوايا.
- ارسم خماسيًّا آخر متطابقًا مائلًا ومقلوبًا (بلون أخف).
- ارسم خطًّا قصيرًا من كل زاوية بعيدًا عن المركز.
- أوصلهم معًا باستخدام عشرة خطوط مستقيمة.

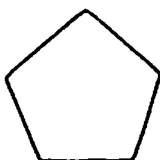
كيفية رسم الجسم ذي العشرين وجهًا Icosahedron



- ارسم مسدسًا متساويًا في جميع الجوانب والزوايا.
- ارسم خطًّا قصيرًا من ثلاث زوايا باتجاه المركز.
- أوصلهم معًا في شكل مثلث.
- قم بتوصيل الزوايا الثلاث الأخرى بزوايا المثلث القريبة.
- اختياري: كرر كل الخطوات مقلوبة (بلون أخف).

أسس الرياضيات Foundations

حوار- a dialog





نلاحظ أن الحوار هنا بين شكلين، سنرمز للشكل الأبيض بدائرتين بيضاوين وللشكل الأسود بدائرتين سوداوين للمحافظة على فكرة الكاتب - المترجم.

إذن: يمكن إثبات صحة بعض الأشياء، ويمكن إثبات خطأ بعض الأشياء، و —

•• انتظر لحظة، انتظر، هناك شيء مريبٌ.

ممممممممم؟

•• حسنًا، في وقتٍ سابقٍ كنَّا نبرهن على الأشياء. سنقوم بتقديم ادعاء، وبعد ذلك ستكون هناك حجة مقنعة حول سبب صحة هذا الادعاء، لكنك الآن تقول أشياء مثل «لقد أُثبِت ذلك» و«كما اتضح»، ما هذا؟

هناك الكثير لتجاوزه! لا يمكننا تجاوز كل دليلٍ. اخترت يدويًّا زوجين لطيفين لتضمينهما، لكن الكثير من البراهين مملة، ولم أرغب في أن أتحمَّل تفاصيل طويلة لكل حالة على حدة.

•• لكنك رأيت براهين على كل هذه الأشياء؟ وكانت مقنعة تمامًا؟

معظمها، نعم، بعض البراهين جميلة جدًّا ويمكنني أن أريها لك إذا أردتَ، إنها مقنعة للغاية، كأنها قميصٌ واقٍ من الرصاص. أعترف أن بعضها لم أره شخصيًّا، لكنني أعلم أنها قد أُثبِتت، لذلك يُستشهَد بها طوال الوقت، وتُقبل عمومًا على أنها صحيحة، لتكون براهين صالحة تمامًا.

•• صحيحة في حكم من؟ أنا لا أحاول التشكيك في حكمك أو

أي شيء، أعني فقط أن الناس يختلفون حول الأشياء طوال الوقت، وما هو مقنع لشخصٍ ما ليس دائمًا دليلًا مقنعًا لشخصٍ آخر؛ لا تحصل دائمًا على إجماع هيئة المحلفين، لذلك يبدو أنه سيكون لديك أشخاص -حتى جميع الأشخاص الأذكياء- سيختلفون أحيانًا حول ما يُعتبَر دليلًا صالحًا أم لا.

بالتأكيد، يختلف الناس حول الأشياء، لكننا لا نتحدث عن قاعة المحكمة هنا، لا أحد يتقاضى رواتبَ لمجادلة جانبٍ معينٍ، نعمل جميعًا معًا لمعرفة ما هو حقيقي.

•• ما زالت المشكلة قائمة!

وإلى جانب ذلك، فإن الرياضيات أقل تعقيدًا من الأشياء التي يختلف الناس عادة حولها، أعني، نحن نتحدث هنا عن الأشكال والتراكيب الأساسية، هنا لا يوجد مجالٌ للقيل والقال «هي قالت.. هو قال..»، لا يوجد الكثير من الأجزاء المتحركة.

•• بالتأكيد، ولكن حتى بعض الأدلة التي أظهرتها لي، تجعلني أجادل في حيرة. أعتقد أنني فهمت الأمر، لكنه ليس واضحًا تمامًا لهذا العالم. وهذه البراهين الطويلة والمعقدة التي لا تظهر لي حتى، بعضها أنت نفسك لم تره... كيف لي أن أثق بذلك؟ ألا ترى أن هذا مريبٌ؟

صحيح تمامًا.

•• أعني، هل كان هناك «إثبات» قبله الجميع ومن ثَمَّ تبيَّن أنه خطأ؟

طيب!... في الواقع نعم، لكن هذا حقًّا هو الاستثناء وليس القاعدة، لدينا سجلٌ حافلٌ مع مراجعة الأقران وأشياء من هذا القبيل، نحن صارمون للغاية بشأن ما يمكن اعتباره دليلًا صالحًا.

•• لكنه حدث بالفعل.. أليس كذلك؟

نعم، ولكن في الحقيقة مرة أو مرتين فقط بشأن موضوعات قد تعتبر مهمة.

•• عن أي نظريات تتحدث؟

لقد كانت نظرية الألوان الأربعة، كانت تقول إنه إذا كان لديك مجموعة من البلدان على خريطة العالم الخيالية، وتريد تلوينها بحيث لا تتجاور دولتان لهما نفس اللون، فيمكنك دائمًا القيام بذلك بأربعة ألوان على الأكثر، لأي خريطة على الإطلاق.

•• وفي الواقع هذا لم يكن صحيحًا؟ هل كان خطأ؟

لا، هذا صحيحٌ! ولكن كان هناك دليلٌ وجده شخصٌ ما، منذ زمن طويل، دليلٌ جميلٌ وبسيط نسبيًّا، وقد اجتاز مراجعة الأقران وكان الجميع راضين عنه.

•• ثم وجد شخصٌ ما عيبًا؟

صحيح، الدليل كان باطلًا، كانت هناك حالة واحدة لم يضمنها الإثبات، وحاول الناس تصحيح هذه الحالة، لكن لم ينجح أحد على الإطلاق، وأصبح الأمر غير مثبت، وهذا ما نسميه حدسية أربعة ألوان.

•• جميل، لكن لحظة! كيف تعرف أنه صحيح إذن؟

لأنه الآن قد أثبت! باستخدام أجهزة الكمبيوتر، برهان مختلف تمامًا، مع بعض من نظرية الرسوم البيانية الثقيلة (أو المعقدة)، في بضع مئات من الصفحات.

●● لكن انظر، ما زلت تتصرف كما لو كان هذا الدليل الجديد للكمبيوتر هو القرار النهائي لما هو حقيقي، ماذا لو تبيَّن أنه خطأ مرة أخرى؟ تحتاج إلى إعادة الارتباط بشيء حقيقي، وإلا فإنك تطارد ذيلك فقط، «الرياضيات تقول إن x صحيحة، ويبقى هذا صحيحًا، أن x صحيحة، لأن الرياضيات تقول لنا إنها صحيحة».

○○ هل تعتقد أننا جميعًا مخطئون؟ الجميع، كل هؤلاء الرياضيين، كلنا مخطئون بشكلٍ منهجي بنفس الطريقة؟ ما هي احتمالات أن يحدث ذلك؟

●● لقد حدث ذلك من قبل، أليس كذلك؟ يحدث هذا في الواقع كثيرًا من الناحية التاريخية، حيث يكون الجميع مخطئين بشكلٍ منهجي بشأن نفس الشيء، إنه مجرد شيء قيل للجميع إنه صحيحٌ ولا يفكر أحدٌ في الحقيقة في التشكيك فيه، ستصبح منبوذًا أو تشعر بالعار لاعتقادك أنه قد يكون خطأ.

○○ حسنًا.

●● وأنا لا أقول إن كل هذه الأشياء خاطئة، أي مثل الخطأ التام أو الخطأ الموضوعي، إنها مجرد محتوى داخل السياق، أليس كذلك؟ تؤثر الثقافة بوضوحٍ في ما نعتقد أنه صحيحٌ أو واضحٌ، لذا فإن مجتمع الرياضيات لديه بعض الإجماع حول البراهين التي نتقبَّلها على أنها

صالحة، عظيم! يمكنك اتباع هذه القواعد، لن أوقفك، أنا فقط لا أفهم لماذا يتوجَّب على الجميع قبول كل شيء في ظاهره.

حسنًا، من المسلَّم به أن السياق مهمٌّ، ويمكن أن يكون الناس مخطئين بشكلٍ منهجي كمجموعة، هذا بالتأكيد يحدث كثيرًا لأشياء مثل السياسة والأخلاق، ومن المؤكد أنه يحدث حتى للعلم.

هناك الكثير من الأشياء التي كانت إجماعًا علميًّا، وأشياء مثل العلقات والصفراء، وأيضًا مجالات علمية كاملة كانت في الأساس مجرد أشخاص يكتبون أيديولوجية سياسية عنصرية بلغة العلم.

●● بالضبط!

لكنني أعتقد أن الرياضيات مختلفة، فعلًا؟! اسمح لي على الأقل أن أقول لماذا.

●● معك.

المميز في الرياضيات هي أنها لم تكن أبدًا مجرد ثقافة معزولة تقدم الرياضيات وتعزز نفسها وتعاقب المنشقين أو أي شيء آخر، بقدر ما يمكننا أن نقول، فإن كل ثقافة بشرية ابتكرت الرياضيات بشكلٍ مستقلٍّ، كما يقولون، «إنه نفس الشيء في كل بلد».

●● حسنًا، هذه نقطة جيدة.

أشياء مثل علم الفلك والجغرافيا والملاحة والعد وحفظ السجلات والهندسة والعمارة وبعض أشكال المال والمقامرة وأشكال

التفكير المنطقي والري والقياس والبناء... تطورت كل هذه الأدوات بشكلٍ منفصلٍ عن طريق كل مجتمع نعرفه تقريبًا.

•• أتفق معك هنا، لن تتوقع منَّا جميعًا أن نقوم بنفس الخطأ، سيكون من الصعب التنسيق.

وبالتأكيد، ربما تكون عقدة في سلسلة هنا وتسجيل العلامات هناك، لكنها كلها نفس الأفكار، اللغة مختلفة، والترميز مختلف، لكن كل شخص لديه نفس الرياضيات إلى حدٍّ ما.

•• كلها؟ بالتأكيد الحساب والهندسة، لكن كل نفس الرياضيات؟ كل هذه الأشياء التي تقولها عن مجموعات التناظر، ونظريات الألوان الأربعة، واللا نهاية مقابل الاستمرارية. أنت تقول إن كل ثقافة لها ترجماتها الخاصة لكل هذه الأفكار الدقيقة؟

من الصعب تصديق ذلك.

حسنًا، الإجابة السريعة هي لا.

•• أها!

لأن كل ثقافة تختار مجالاتٍ مختلفة من الرياضيات للتركيز عليها! لقد تعمَّق المايا في التقاويم، وكان الفيثاغوريون مهووسين بالنسب، إذن هذه هي المجالات التي يستمرون في تطويرها.

من المؤكد أن هذا يتعلق بقيمٍ وأولويات مختلفة، وجماليات، وأشياء ثقافية من هذا القبيل، هذا لا يجعل الرياضيات نفسها أقل فاعلية أو غير قابلة للتطبيق!

كلما كان لديك ثقافات متعددة تبحث في نفس الرياضيات، فإنهم دائمًا يجدون نفس الشيء.

●● دائمًا؟

○○ على حسب معرفتي.

●● [بعد تفكيرٍ] إذن أي ثقافة هذه؟ أنت تتحدث عن بعض قواعد الرياضيات المحددة، أليس كذلك؟

○○ كيف يعني هذا؟

●● عندما تقول إن المجالات الرئيسية الثلاثة للرياضيات هي الطوبولوجيا والتحليل والجبر، فهذا انعكاس لثقافة معينة، أليس كذلك؟ وعندما تخبرني بما تم إثباته أم لا، فذلك وفقًا لمجتمعٍ معينٍ من المراجعين الأقران.

○○ صحيحٌ تمامًا، أعتقد أن الأمر يبدو كأنه الآن مختلف قليلًا عن الماضي، من حيث ثقافات الرياضيات. الآن لدينا العولمة، الطائرات والإنترنت وكل شيء، عندما تتحدث عن «الرياضيات» في أي مدينة كبرى في العالم، أو إذا كنت تدرس الرياضيات في أي جامعة ذات اسم كبير، فيمكنك أن تكون في نيروبي أو شنجهاي أو كامبريدج، وسوف تتعلم نفس الأشياء.

●● ومع ذلك، هذا تقاليد، تقاليد الرياضيات العالمية الحديثة، من أين أتت؟

حسنًا، لقد فرضتها أوروبا على بقية العالم، من خلال الاستعمار

والإمبريالية، لكن الرياضيات الفعلية نفسها؟ من حيث الترميز وما هي الموضوعات التي نركز عليها والطرق المحددة التي نستخدمها؟ إذا نظرت إلى الأمر كله إلى حدٍّ كبيرٍ ستجده مشتقًا من تقاليد الرياضيات للمسلمين العرب والأفارقة.

●● صحيح، اعتقدت ذلك! أعني، الأرقام تسمى حرفيًّا بالأرقام العربية.

بالضبط. و«الخوارزمية»، هذا اسم شخص ما، محمد الخوارزمي، إنه مثل «مفك براغي فيليبس»، الخوارزمية algorithm تعني فقط «كانت هذه فكرة الخوارزمي». Algebra الجبر أيضًا، هو تحريف لفظي للكلمة العربية، الجبر al-jabr، التي لم تكن كلمة في أي لغة أوروبية، لقد استخدمت لوصف عندما تنقل قيمة رياضية إلى الجانب الآخر من المعادلة، أنت بالتأكيد تعرف الجبر.

●● لقد أتى كل شيء من إفريقيا، أليس كذلك؟

في مكان ما حول ما نسميه الآن شمال إفريقيا والشرق الأوسط، لم تكن مقسمة في ذلك الوقت، لقد كانت مجرد شبكة من المجتمعات التي تتاجر وتتبادل الأفكار بعضها مع بعض. ولمدة نصف ألف عام، بينما كانت أوروبا مشغولة في محاربة الفايكنج ومحاربة بعضها البعض، تمتع العالم الإسلامي بفترة طويلة من السلام والازدهار، كان هناك الكثير من الوقت للاسترخاء والتفكير في الرياضيات!

وذلك عندما توصَّلوا إلى معظم تقنيات الحساب والجبر التي نتعلمها جميعًا في المدرسة، لقد تعلموا حل المجهول، النقاط العشرية،

الأعداد غير النسبية، متعددات الحدود والمعادلات التربيعية ومكملات المربع، كل ذلك. عندما تفكر في التركيز على ما لدينا اليوم، وهو ثقافة الرياضيات العالمية، فإن الأمر كله يتعلق بالتجريد والتلاعب بالرموز والإجراءات المنظمة والخوارزمية. هذا متجذرٌ في التقاليد الإسلامية.

ولكن لكي نكون منصفين، لم تعمل أي ثقافة على الرياضيات بمعزل عن غيرها! لقد استعاروا نظام «الرقم العربي» من علماء هندوس كتبوا الرياضيات الخاصة بهم في القصائد السنسكريتية، وكان لدى الصين العداد، كما تعلم، وجد الجميع طريقة للقيام بذلك. «الجبر» الذي انتشر في أوروبا المجاورة، لمئات السنين استخدموا الكتب المدرسية العربية المترجمة لتدريس الرياضيات في أفضل المدارس الأوروبية.

•• هذا رائع، من الجيد معرفة مصدر كل هذا، لكن ما زلت أشعر كأنك تتهرَّب قليلًا.

أتهرَّب؟

•• من حيث ثقافة الرياضيات العالمية الحديثة، فإن الأفكار تأتي من العالم الإسلامي، ولكن كما قلت، كانت أوروبا هي التي جعلتها عالمية. صحِّح لي إذا كنت مخطئًا، ولكن يبدو أنك عندما تتحدث عن الرياضيات الحديثة، ليست الأشياء الكلاسيكية مثل حل X، ولكن هذه النظريات المجنونة التي يدرسونها في الكلية فقط، يبدو أن معظم الأشخاص الذين نسمع عنهم هم أوربيون، أليس كذلك؟

وهو أمرٌ مشكوكٌ فيه بالتأكيد من وجهة نظري، أن يكون هذا الشيء عالميًّا، بينما الشيء الحقيقي والموضوعي ليس متجذرًا في الثقافة.

حسنًا، أنا لست مؤرخًا، لكن أنا وأنت نعلم أن القرون القليلة الماضية كانت وقتًا عنيفًا وقمعيًّا للناس في البلدان المستعمَرة، وهو في الأساس كل مكان خارج أوروبا. لقد أثبت الكثير من هذه النظريات في وقتٍ لم يكن مسموحًا فيه لمعظم دول العالم الاقتراب من الأبراج العاجية في الأوساط الأكاديمية.

•• صحيح! بالإضافة إلى ذلك، إذا تم القضاء على مجتمعك بالكامل وإعادة تنظيمه، فمن المحتمل ألا تكون أولويتك القصوى هي الوقوف مسترخيًا أمام السبورة والطباشير متسائلًا كيف نتعامل مع الأشكال.

أرى أنه لأمر مؤسف حقًّا كيف يمكن لهذه الأحداث التاريخية العشوائية أن تحرمنا من الكثير من المواهب الرياضية المحتملة. أعتقد دائمًا، عندما أقرأ سيرة ذاتية لعالِم رياضيات مشهور، أين كانت ستذهب هذه القصة بشكلٍ مختلفٍ إذا كان قد نشأ كفتاة في ذلك الوقت؟

•• هذه فكرة محبطة، من الواضح أن الرياضيات قوية، لذا ليس من المستغرب أن يحاول الناس اكتنازها والاحتفاظ بها بشكلٍ حصري.

يا له من دافعٍ غريبٍ، المقصد من الرياضيات هي أنها من المفترض أن تكون عالمية بالكامل!

•• حسنًا، لنفترض أنك محقٌّ في أن الرياضيات هي في المسار الصحيح تمامًا، وأن هيمنة هؤلاء الأولاد البيض عليها هو مجرد حادث تاريخي حديث، يتعلق بالسياسة.

صحيح!

•• إذن، ألا يؤدي ذلك إلى وجود تحيز؟ أعني، إذا كان معظمهم من الرجال البيض في الغرفة، يراجعون الأوراق ويقيمون الاختبارات، ألا يؤثر ذلك في ما يُدرَس وما يُقبَل على أنه حقيقي؟

ما زلت لا أفهم كيف يغير هذا من الرياضيات الأساسية.

•• فعلًا؟ كيف لا؟

إليك الموضوع: يمكنني أن أرى كيف يمكن أن يؤثر ذلك في الأشياء المحددة التي تدرس وتحدد أولوياتها، وقد يؤثر أيضًا في أنواع الأفكار التي يبتكرها الأشخاص أو يفوتونها، لكن الرياضيات نفسها كانت موجودة بالفعل، أعتقد أنه إذا أثبتُّ أن شيئًا ما صحيح، فهذا يعني أنه في الحقيقة صحيح.

•• [تفكير].

•• حسنًا، هل يمكنك أن تخبرني عن هذا الشيء الذي بين الصواب والخطأ؟

حسنًا، رائع، أعتقد أنه سيعجبك، إنه يدعم وجهة نظرك في أن الرياضيات قد تكون كلها مصنوعة.

•• أنا أنصت.

يجب أن تعلم، مع ذلك، أن هذه النتيجة كانت سبقًا علميًّا كبيرًا لعلماء الرياضيات في ذلك الوقت، لقد حطمت رؤية الرياضيات باعتبارها بلورة كاملة ونقية من الحقائق والأكاذيب، لقد أضاف هذا

الغموض الذي لم يرغب أحدٌ من كبار علماء الرياضيات في الاعتراف به، حتى إننا ما زلنا لم نتعافَ تمامًا.

●● حسنًا ما هو؟ ماذا هناك غير الصواب والخطأ؟

انتظر، أريد أن أعطي بعض السياق أولًا، من أجل تهيئة المشهد.

●● تمام.. بالتأكيد.

حدث هذا منذ نحو مائة عام، في أوج انتشار الإمبريالية، مما أدى إلى الحروب العالمية. من المحتمل أن معظم الشخصيات المعنية هي ما تتوقعه: مجموعة من الرجال البيض الأغنياء، وأشخاص نشأوا مع مدرسين باهظي الثمن ولديهم الكثير من أوقات الفراغ. نشأ بعض أفراد العائلة المالكة والإيرل (لقب في طبقة النبلاء) في هذا المزيج.

●● يبدو صحيحًا.

في هذا الوقت كان ثمة ذعرٌ طفيفٌ يدور في الرياضيات في ذلك الوقت، إنه يتماشى مع ما تقوله: كيف نعرف أن أيًّا من هذا صحيح؟ في هذا الوقت كان الجبر المجرد ينفجر، كل هذا البحث في البنية العميقة وطبيعة المنطق نفسه. لقد اختزلت الكثير من الرياضيات إلى مسلمات وأنظمة رسمية ونقاط وخطوط ورموز متحركة وفقًا لقواعد غامضة، وبدأ الناس يفكرون، ما الذي يحدث؟

●● منطقي، عندما تنتقل من الحجج البديهية الأساسية إلى هذه الألعاب التجريدية الأنيقة، ستقل ثقتك بمشروعية ما تفعله.

حسنًا، يصبح الأمر مخيفًا، لماذا نفعل هذا أصلًا؟

●● من الرائع أن يعترف هؤلاء الرجال بأن لديهم مخاوف.

حسنًا، لم يفعل الكثير منهم ذلك، لكن الأمر تطلب واحدًا أو اثنين فقط لإحداث مشكلة، كان هناك هذا الطوبولوجي الهولندي الذي بدأ يخرج ويقول أشياء مثل «الرياضيات هي امتداد للحدس البشري» وجميع أنواع الادعاءات الفلسفية المحرجة التي تهدد شرعية واحترام الرياضيات الرسمية.

وكان علماء الرياضيات الآخرون غاضبين! رتَّب بعضهم لطرد هذا الطبولوجي من مجلس إدارة Mathematische Annalen، التي كانت إحدى أهم مجلات الرياضيات، أرادوا ألا يؤثر في الآخرين في إنتاج هذه الأفكار التجديفية (بالنسبة إلى الرياضيات).

●● ألا يقوض هذا النوع من الشرعية؟ إذا تأثرت الرياضيات بسياسات تافهة كهذه.

حسنًا، لم يكن القصد من هذا أن تحل مشكلة هذا الأمر، لقد كان إصلاحًا مؤقتًا لكسب بعض الوقت. ما أراده هؤلاء في النهاية هو إثبات، بشكلٍ نهائي، أن الدليل الرياضي هو المحدد النهائي لما هو صحيح وما هو خطأ.

●● لذا أرادوا إثبات أن الرياضيات شرعية، باستخدام ماذا؟ الرياضيات؟

أعلم، بالعودة إلى الماضي، كان من الصعب جدًّا أن يعتقدوا أن ذلك سيجدي نفعًا.

●● ألم يكن ذلك واضحًا؟ أشعر أنهم جميعًا قد رأوا على الفور مشكلة ذلك.

حسنًا، الأمر ليس بهذه البساطة، لم يحاولوا إثبات أن الرياضيات «شرعية»، وهذا في الحقيقة لا يعني أي شيء. يستخدم الناس الرياضيات طوال الوقت ويبدو دائمًا أنها ذات جدوى، لذا فهي بالفعل شرعية بهذا المعنى.

ما أرادوا فعله هو بناء أساس متين للرياضيات، أرضية صلبة يمكن أن يعتمد عليها كل شيء آخر. حتى ذلك الحين، كان مفهوم «الإثبات» يعتمد على الحدس: هل هو مقنع؟ بدأ هذا الشعور يضعف ويبدو خطأً، خاصة عندما تتعامل مع أشياء غريبة مجردة. لذلك أرادوا التحول إلى شكلٍ جديدٍ صارمٍ من الإثبات، شيء منظم ومنهجي لا يعتمد على من يقوم بالإثبات.

●● لقد أرادوا إخراج الحدس والذاتية من الصورة، هذا ما تقوله.

يمكنك أن تضعها في هذا السياق بالتأكيد.

●● لا أفهم كيف يكون ذلك ممكنًا، يمكنك صنع نوع جديد من الإثبات بمجموعة من القواعد الصارمة، لكن لا يزال يتعين على الجميع الاتفاق على ماهية تلك القواعد، ليس الأمر كما لو أنها سقطت من السماء، لقد صنعها الناس على أساس الحدس والذاتية.

حسنًا، ولكن هنا تكمن المشكلة، كانت الفكرة هي مواصلة السعي في هذا الطريق، بدءًا من المنطق الأساسي.

•• اشرح من فضلك.

إذن، نعم، يمكن أن يكون للناس خلافات مبدئية حول ما يجب اعتباره دليلًا رسميًّا.

ربما تعتقد أن هذه البراهين الحاسوبية الجديدة لا يمكن الاعتماد عليها، أو ربما تعتقد أنه لا ينبغي لنا العبث باللا نهاية، فنحن لا نعرف حقًّا ما الذي نتحدث عنه، وبالتالي فإن أي دليلٍ يتضمن مجموعات لا نهائية ليس جديرًا بالثقة.

•• نعم، هناك مجالٌ كبيرٌ للخلاف.

تمامًا، لقد قيل إن الأرقام غير المنطقية غير موجودة بالفعل. يعتقد بعض الناس أن الكسور مريبة قليلًا، ويجب أن نلتزم بالأعداد الصحيحة فقط!

•• هذا مضحك، هذا مثير للاهتمام، أود التحدث إلى شخص يعتقد ذلك.

لكن الفكرة هي: كلما تراجعت، أصبحت أكثر ثباتًا، نحن واثقون تمامًا بشرعية العد الأساسي، أليس كذلك؟

•• على الرغم من أنني متأكد من أن شخصًا ما قد لا يوافق على ذلك حتى.

في الواقع، نعم، هناك عالِم رياضيات جادل بأنه حتى الأعداد الصحيحة تتصاعد بشكلٍ كبيرٍ، في الواقع، لا توجد أعداد كبيرة، لكن لا أحد يعتقد أن هذه الفكرة تحمل الكثير من الأهمية.

هذه هي الخطة إذن؛ هؤلاء الرياضيون ذوو الأسماء الكبيرة، كانوا سيشقون طريقهم إلى الأعلى، بدءًا من الأساسيات المطلقة، ما يسمونه منطق الترتيب الصفري، سيثبتون كل منطق الدرجة الأولى، ثم الحساب الأولي، ثم يستخدمون ذلك لإثبات أشياء تتعلق بالأرقام غير الكسرية، ثم الأرقام التخيلية، ومن خلال كل قانون أثبتوا الآخر، لقد أثبتوا كل حقيقة رياضية معروفة داخل هذا النظام القوي.

وبعد ذلك سيتعين على جميع المشككين والكارهين كتابة خطاب اعتذار رسمي لطيف للغاية.

•• أرادوا إعادة إثبات كل نظرية من حيث المنطق الأساسي؟

إنه ليس سيئًا كما يبدو، إنه نوع من «ابتلاع» مجال أعلى للمجال الأسفل منه. تجد طريقة لأخذ أي برهان في المجال الأعلى وترجمته إلى برهان في المجال السفلي، باستخدام أشياء وقواعد أبسط، وهكذا وصولًا إلى المنطق الأساسي.

•• حسنًا، هذا يبدو منطقيًّا، لكن ماذا لو كان شخص ما لا يؤمن بالمنطق الأساسي؟

هل أنت جاد؟ ألا تعتقد أن المنطق صحيح من الناحية الموضوعية؟ «إذا كانت P خطأ»، إذن P ليست «صحيحة»، هل تنكر ذلك؟

•• لا ليس أنا! أنا أؤمن بالمنطق، ويمكنني أن أتركك تفرض

المنطق الأساسي، حيث يبدو أنك تتجه في اتجاه من شأنه أن يدعمني على أي حال.

ولكن هذه هي النقطة بالضبط: لا يزال عليك افتراض شيء ما! لا يمكنك إثبات أي شيء من اللا شيء، عليك أن تبدأ من مكان ما، ببعض من الفرضية الأولى، التي جاءت من حدسك.

أعني، بعد نقطة معينة، ألا يمكننا أن نقول فقط إن الطابق الأرضي هو عقلنا الأساسي؟ «A يعني B، وA إذن هي B»، أليس كذلك؟

●● لا يزال هذا افتراضًا.

حسنًا، أنت محق، لا يمكنك إثبات أي شيء لشخصٍ عنيدٍ، إذا لم تكن متوافقًا مع المنطق الأساسي، فلن تنضم إلى بقية البرنامج بأكمله.

لكن هنا تكون أنت الخاسر! انظر إلى ما فاتك! إذا نجح مشروع التمهيد هذا، فقد وضعنا للتوِّ كل حقيقة رياضية حقيقية في إطار عمل واحد متسق، هيكل واحد منظم بدقة.

●● هذا عادل بما فيه الكفاية، لأن هذا هدفٌ مفيدٌ بحد ذاته.

صحيح، أليس هذا مقنعًا؟ شبكة كثيفة من المعرفة تحتوي على كل جملة (بيان) حقيقية!

●● «شجرة المعرفة هي الصحيح والخطأ، الحق والباطل».

نعم بالضبط، وستقوم برفض ذلك، لأنك لا تؤمن بالمنطق؟ أكمل.

•• حسنًا، أستطيع أن أرى ذلك، عندما نتفق جميعًا على بعض مبادئ المنطق الأساسي، نحصل على هذا النظام المشترك الكبير من المعرفة الرياضية.

والرياضيات هي أساس الفيزياء، وهي أساس الكيمياء والبيولوجيا، وهما أساس السلوك البشري، إلخ. قد نكون قادرين على شق طريقنا من المنطق الأساسي إلى كل موضوع، وجمع كل حقيقة حقيقية في شجرة واحدة. وبعد ذلك يمكننا أخيرًا تحقيق الموضوعية حول كل شيء، حيث لم تعد الموضوعية شيئًا معقدًا وضبابيًّا بعد الآن، تعرف على أنها «بالضبط ما يوجد في شجرة الحقائق الرياضية هذه»، هذه هي الفكرة على الأقل.

•• أستطيع أن أرى كيف سندمن هذه الفكرة، خاصة بالنسبة إلى مجموعة النبلاء الذين أرادوا أن يشعروا بأنهم على حق في كل شيء.

حسنًا، هؤلاء الرجال، أفراد العائلة المالكة والعلماء، يقومون بتمهيد الطريق، وهم يقومون بعملٍ جيدٍ، يكتشفون كيفية وضع الأعداد الحقيقية بدلالة الأعداد الصحيحة، ويحصلون على جميع الأعداد الصحيحة من مجرد العدد صفر وفكرة «زائد واحد».

•• هذا رائع.

إنهم يجمعون كل ذلك معًا، لقد وصلوا إلى النقطة التي أوشكوا فيها الانتهاء، لم يتبق سوى خطوة واحدة.

•• واو، خطوة واحدة؟ لذا فقد توصلوا إلى حساب التفاضل والتكامل وكل شيء من حيث المنطق الأساسي فقط؟

نعم، حسنًا، كان لديهم الكثير من الوقت.

•• ما هي الخطوة الأخيرة؟

عليهم إثبات أن الحساب كاملٌ، نسختهم، النسخة الصغيرة التي قاموا ببنائها من الصفر و«زائد واحد»، عليهم أن يثبتوا أنها جيدة بما يكفي لإثبات كل الحقائق الحسابية.

•• تمام، لست متأكدًا من كيفية إثبات شيء من هذا القبيل، ولكن حسنًا، كانت هذه هي الخطوة المتبقية.

وهم متحمسون للغاية، زجاجات الشمبانيا جاهزة للاحتفال، إنهم يعتقدون حقًّا أنهم على وشك أن يقوموا بذلك! كل الرياضيات، من ست مسلمات وأربع قواعد استدلال، كانت ظاهرة ثقافية في تلك الدوائر، كتبوا كتبًا مثل (أساسيات الرياضيات) Principia Mathematica، وبالطبع كان هناك أشخاص وصفوهم بالجنون، وقالوا إنهم لا يستطيعون فعل ذلك أبدًا، وإن كل ذلك كان بلا معنى، لكن لم يستمع إليهم أحد، لأنهم لم يكونوا أعضاء في مجلس إدارة دورية Mathematische Annalen.

•• إذن ما الخطأ الذي حدث؟

لقد كانت كارثة، أمرًا مهينًا، لقد وجَّه واحدٌ منهم الضربة القاضية.

●● ما هذه الدراما..

زميل اسمه جودل[*] Gödel، لقد كان نفس الشخص الذي أثبت أن نسختهم من منطق الدرجة الأولى كانت كاملة، بطل كبير! لقد كان في العشرينيات من عمره عندما أثبت ذلك، وهو وقتٌ كبيرٌ لتحقيق سبق علمي كبير آخر، يبدو أنه قد يكون الشخص الذي يُظهر أن الحساب مكتمل أيضًا.

●● دعني أخمن: لقد أثبت أن نموذجهم الحسابي الصغير لم يكن كاملًا.

أسوأ بكثيرٍ.

(*) كورت جودل **Kurt Gödel** (٢٨ أبريل ١٩٠٦ - ١٤ يناير ١٩٧٨) منطقي وعالم رياضيات وفيلسوف، وُلِد في برون في مورافيا فيما كان يعرف باسم نمسا-المجر. نشر جودل مبرهنتي عدم الاكتمال عام ١٩٣١ عندما كان عمره ٢٥ عامًا، وذلك بعد سنة واحدة من حصوله على شهادة الدكتوراه من جامعة فيينا. تنص مبرهنة عدم الاكتمال الأولى على أنه بالنسبة إلى أي نظام بديلي متكرر متسق-ذاتيًّا- وقوي بما فيه الكفاية ليصف حساب الأعداد الطبيعية (بديهيات بيانو على سبيل المثال)، هناك افتراضات حقيقية حول الطبيعيات لا يمكن إثباتها من البديهيات. ولإثبات هذه المبرهنة، طوَّر جودل تقنيةً تُعرَف الآن باسم ترقيم جودل، ترمز إلى التعابير الرسمية بأرقام طبيعية.

أظهر أيضًا أنه لا يمكن دحض بديهية الاختيار أو نظرية الاستمرارية من بديهيات نظرية المجموعات، مفترضًا أن هذه البديهيات غير متسقة. فتحت النتيجة السابقة الباب لعلماء الرياضيات ليفترضوا بديهية الاختيار في براهينهم. قام أيضًا بإسهاماتٍ مهمة في نظرية البرهان عن طريق توضيح الروابط بين المنطق الكلاسيكي، المنطق الحدسي، ومنطق الموجهات.

•• ماذا فعل؟

لقد أثبت أن كل نموذج حسابي محتمل غير مكتملٍ.

•• لذا..

لذا فإن مشروع التمهيد مستحيل، لا يمكنك إثبات كل حقائق الرياضيات في نظامٍ رسمي واحدٍ، لا يمكنك حتى إثبات كل الحقائق الحسابية في نظام رسمي واحد.

•• رائع، كيف تثبت ذلك؟

إنه نفس النوع من الحجة التي تستخدمها لإثبات أن الاستمرارية لا يمكن وضعها في قائمة، أي نظام من المفترض أنه يحتوي على جميع الحقائق الحسابية، ثم تجد الحقيقة المفقودة، تجد في الأساس جملة تقول، «لا يمكن إثبات هذه العبارة من البديهيات».

•• حسنًا، هذا لطيف، يمكنني أن أتخيل كيف ستسير الأمور.

وإذا حاولوا إضافة الحقيقة المفقودة كبديهية جديدة، حسنًا، يمكنك فقط إعادة استخدام نفس العملية مرة أخرى والعثور على جملة جديدة تقول، «لا يمكن إثبات هذه العبارة من تلك البديهيات».

•• جيد، والمهم أن الجميع اتفقوا على صحة إثبات؟

نعم، لقد اتفقوا، لا أحد يستطيع أن ينكر ذلك. الكثير أصبح على المحك، ولا يمكن لأحدٍ أن يجد عيبًا في منطق جودل، كان محكمًا جيدًا، كان عليهم أن ينشروا بحثه.

•• رائع، أنا أحترم هذا.

هو كذلك، تحطم الحلم، كان عليهم إخفاء كتاب (أساسيات الرياضيات) Principia Mathematica. بعضهم ترك الرياضيات وذهب إلى الفلسفة، عمل بعضهم في علم الدلالات الرسمي، واللغويات، ونظرية الحساب، وهي أشياء تحولت لاحقًا إلى لغات برمجة مبكرة.

•• ليس من المستغرب أن تبدو هذه الأنظمة البديهية مشابهة للغات الترميز، كل شيء عن if وthen، الكثير من المتغيرات، والقواعد الصارمة.

والخوارزميات أيضًا، لقد عملوا بالفعل على وضع خوارزميات خطوة بخطوة لكيفية استخدام هذا النظام المثالي الذي مهَّد لإنتاج حقائق جديدة تلقائيًّا. أجهزة الكمبيوتر القديمة، لم تكن مكانًا لمشاهدة صور الناس وتبادلها، لقد صُمِّمت لإجراء حسابات منهجية من هذا القبيل، من أجل الحساب.

•• حسنًا، جميل جدًّا، قصة جميلة، كادوا يبنون آلة أتوماتيكية حسابية للحقيقة truth machine، ثم لم يفعلوا، لأن هذا مستحيلٌ.

إذن ما هي الحالة بين صواب وخطأ؟

حسنًا، لا ينبغي لي أن أقول «هناك شيء ما بين الصواب والخطأ» كأمرٍ واقعٍ، يختلف الناس إلى ما لا نهاية حول ما يعنيه إثبات جودل، وكيف يجب علينا تفسيره، برأيك ما يعني هذا؟

•• ماذا يعني هذا؟

الفكرة أنه لا يوجد نظامٌ رسمي للإثبات يمكنه أن يثبت كل الحقائق الرياضية.

●● أعتقد أنني لم أشعر بالصدمة، يمكنك التحدث عن حقائق كونية وإثباتها الموضوعي، وربما توجد هذه الأشياء، من يدري؟ ممكن! ولكن من الناحية العملية، يشير «الإثبات» دائمًا إلى ما يجده الناس مقنعًا، وهذا يعتمد على الحدس والذاتية والسياق الاجتماعي، ولا توجد طريقة للتغلب عليه.

لطالما كانت هناك مجموعات من الناس يعتقدون أنهم على حقٍّ، أليس كذلك؟ ليس فقط الطريقة التي يعتقد بها الجميع أنهم على حق، ولكنهم يحتكرون الحقيقة، كما تعلم بموضوعية، إنه الشيء الذي يتفق فيه الله معك. وقد بذلوا جهودًا كبيرة في محاولة إثبات أن الأمر ليس فقط في رؤوسهم، وأن كل من يختلف معهم مخطئ، وقد انتهى بهم الأمر عادةً إلى الظهور بمظهر أحمق.

لذلك حاول هؤلاء الناس إخراج الحدس من الرياضيات، واختزال الحقيقة إلى صيغة، هذه جسارة، سأعترف لك بذلك. يبدو أن لديهم جميع الموارد التي يرغبون في منحها أفضل ما لديهم، لذلك لم ينجح الأمر. بالنسبة إليَّ، هذا يعني أن الحقيقة شيء غامض ولا تتوافق مع المفاهيم البشرية عن النظام والسيطرة.

هذه وجهة نظر صحيحة تمامًا، وأعرف تمامًا من أين أتت.

●● وأنت؟ كيف تفسر جودل؟

حسنًا، بالعودة لمبادئي.

ربما أنا من الطراز القديم، لكنني ما زلت أعتقد أن الرياضيات صحيحة! وأعتقد أن الرياضيات تعلِّمنا الكثير عن ماهية الحقيقة ونوع هيكلها أو إيقاعها. أعتقد أن الإثبات شيء مهم، والمنطق شيء مهم، وهذه ليست مجرد محاولات حمقاء لتقييد الواقع بإرادتنا، أعتقد أنها في الواقع تعكس شيئًا ما حول كيفية انسجام الكون معًا.

في الرياضيات، بعض الأشياء يمكن إثبات صحتها وبعض الأشياء خاطئة بشكل يمكن إثباته. وبعد ذلك، وفقًا لـ جودل، بعض الأشياء ليست كذلك لا صحيحة ولا خاطئة، بعض الأشياء غير قابلة للإثبات أصلًا. «مستقلون عن مسلمات نظرية المجموعات حسب تسيرميلو- فرانكل ZFC» كما يقولون. أسئلة من دون إجابات، وليس لأننا لم نعثر على هذه الإجابات بعد؛ فإن قيمة الحقيقة ببساطة غير معروفة.

هذا يترك لنا خيارين، كلاهما سيئ. يمكننا القول إن هناك فئة ثالثة بالفعل: غير معروفة، ربما، أو غير محددة، أو علينا أن نقبل أن الحقيقة ليست مطابقة للإثبات، وأن هناك عبارات حقيقية لا يمكن إثباتها أبدًا، وأن وسيلتنا الوحيدة للوصول إليها هي الأشياء الباهتة مثل «الحدس الميتافيزيقي».

لكن هذه وجهة نظري فقط، ويمكننا أن نتفق أو نختلف.

●● حسنًا، بناءً على ذلك، يبدو أننا متفقان.

نحن بالتأكيد مختلفان تمامًا!

بعض فلسفات الرياضيات

الأفلاطونية platonism

الأشياء الرياضية موجودة بالفعل في بعض «العالم الأفلاطوني».

الحدسية intuitionism

الرياضيات هي امتدادٌ للحدس والاستدلال البشري.

المنطق logicism

الرياضيات امتدادٌ للمنطق، وهو موضوعي وعالمي.

التجريبية empiricism

الرياضيات مثل العلم تمامًا: يجب اختبارها حتى تُصدَّق.

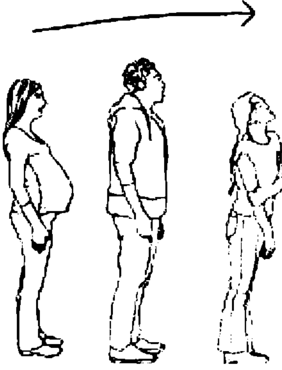
الشكلية formalism

الرياضيات هي لعبة تلاعب رمزي ليس لها معنى أعمق.

التقاليدية conventionalism

الرياضيات هي مجموعة الحقائق المتفق عليها داخل مجتمع الرياضيات.

لغز منطقي



يقف ثلاثة أشخاص منطقيين في طابور؛ لذلك هم لا يرون إلا من هم أمامهم فقط.



تُقدِّم إليهم بائعة القبعات ثلاث قبعات بيضاء واثنتين من القبعات السوداء.

تضع قبعة على كل رأس شخصٍ وتخفي الاثنتين المتبقيتين،

تسأل: «هل يعرف أحد ما لون القبعات التي لدينا؟».

لا إجابة.

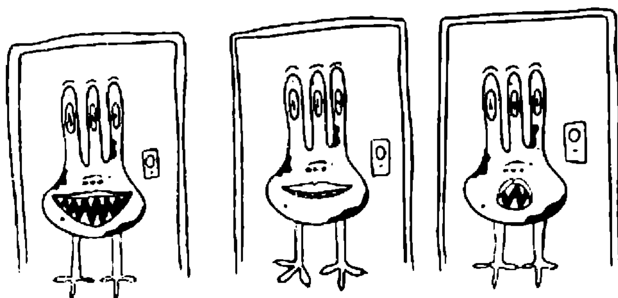
«الآن هل يعرف أي شخص ما لون القبعات التي لدينا ؟».

لا إجابة.

«الآن هل يعرف أي شخص ما لون القبعات التي لدينا؟».

يجيب شخصٌ واحدٌ، أي شخص سيجيب؟ وما لون القبعة؟

لغز منطقي أصعب



ثلاثة توائم متطابقة تحرس ثلاثة أبواب متطابقة.

أصغر التوائم الثلاث يكذب دائمًا.

الأكبر دائمًا يقول الحقيقة.

ثالث الثلاثة هو المحتال ويجيب باختياره (الصدق أو الكذب).

خلف باب المحتال هلاك مؤكد، الأبواب الأخرى نجاة.

يمكنك طرح سؤال واحد على ثلاثة توائم (دون معرفة أيهما

وبعد ذلك يجب عليك اختيار بابك.

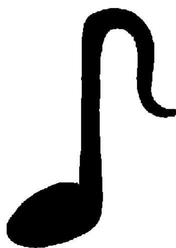
ماذا ستفعل؟

النمذجة- Modeling

النماذج - models

الآلية أو الأتمتة - automata

العلوم - science



النماذج Models

حسنًا! حسنًا، أنا أقرأ أفكارك، ما هو الهدف من كل هذا؟ أليس كذلك؟ البديهيات، طارات مزدوجة وثلاثية، مجاميع متصلة، تناظرات وورق الجدران، لماذا؟ ماذا تعني هذه الصياغة لطلاب الرياضيات حول العالم وعبر التاريخ:

متى سأستخدم كل ذلك في حياتي الحقيقية؟

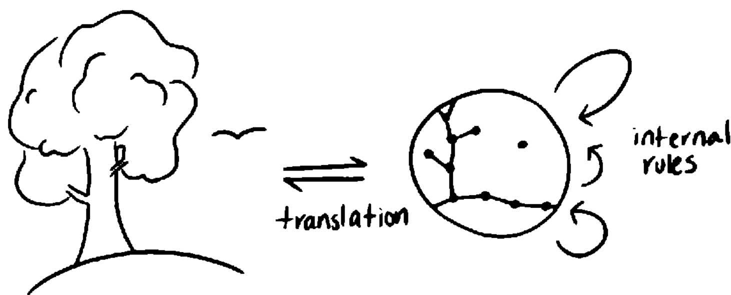
لقد حاولت تجنب معالجة هذا السؤال مباشرة بسبب (وأعدك أن هذه هي المرة الأخيرة التي سأذكرك فيها بهذا) أن علماء الرياضيات المحترفون لا يهتمون حقًّا بالتطبيقات الواقعية.

هذا هو مجال الرياضيات التطبيقية، على عكس الرياضيات البحتة، التي يجب أن تعطيك فكرة عن كيفية تعبير كلمة «تطبيق». ولكن ها نحن ذا، لدينا الكثير من الصفحات لنذهب بعيدًا، بعد أن مررنا بالفعل

عبر الفروع الرئيسية الثلاثة للرياضيات البحتة، بالإضافة إلى القليل من التاريخ والفلسفة، لذلك سأستجيب للسؤال وأقول شيئًا أو شيئين عن الرياضيات التطبيقية، حتى لو كان ذلك سيضعني في مشكلة مع الأشخاص المتشددين الذين يجدون أن أشياء «الحياة الواقعية» هذه غير ملائمة ومشتتة للانتباه.

على وجه الخصوص، هذا القسم الأخير حول النمذجة. النمذجة هي كيفية اتصال الرياضيات بالعالم الحقيقي. بالطبع هناك العديد من الطرق المختلفة التي تظهر بها الرياضيات في العالم الحقيقي، لكن النمذجة هي نوعٌ من الإطار العام الذي يتيح لنا رؤية كل هذه الروابط بوضوحٍ، يمنحنا طريقة مناسبة للتحدث عن الارتباطات، حتى نتمكن من استكشافها وتعلم أشياء جديدة.

يتكوَّن النموذج من مكونين رئيسيين، هناك طريقة عمل النموذج نفسه: مجموعة من القواعد الرياضية الداخلية التي تحدد كيفية عمل كل شيء داخل عالم النموذج المجرد. وبعد ذلك (وهذا هو الجزء المهم) هناك نوعٌ من عملية الترجمة التي تربط النموذج بالعالم الخارجي.



بالطبع، لقد قمت بقراءة كل التفاصيل الدقيقة، ولكن حتى من هذا الوصف التقريبي، يمكنك أن ترى ما الذي سيسمح لنا به مثل هذا الترتيب. يمكننا ملاحظة شيء ما في العالم الحقيقي، وترجمته إلى لغة النموذج، واتباع القوانين الداخلية للنموذج لاستنتاج حقائق جديدة، ثم ترجمته مرة أخرى إلى واقعنا. بعبارة أخرى، يمكننا تعلُّم أشياء عن العالم الحقيقي من خلال اتخاذ منعطف عبر عالم خيالي رياضي، وهذا هو الجديد.

دعونا نلقي نظرة على مثال: نظرية الموسيقى، تعتبر نظرية الموسيقى نموذجًا مجردًا لكيفية عمل الموسيقى. تأخذ الموسيقى الواقعية، استعراضًا معقدًا وفوضويًا للاهتزازات في الهواء، وتترجمها إلى نظامٍ رمزي من النوتات والأوتار. داخل هذا النظام المجرد، توجد قواعد أو إرشادات معينة (لنوعٍ معينٍ أو تقليد موسيقي معين) حول النوتات التي تعمل مع الأوتار، وأي تسلسلات من النوتات ستبدو متوترة أو حزينة أو غير تقليدية، وأي الأوتار تتبع عادةً الأوتار الأخرى؛ هذه كلها عناصر صنع النموذج، لدينا تمثيلٌ مبسطٌ لشيء في العالم الحقيقي سيسهل السيطرة على هذا الشيء الواقعي وتحليله والتنبؤ به.



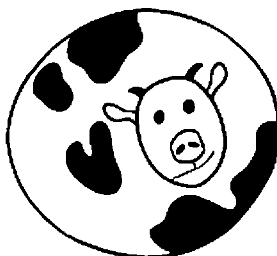
نعم، لقد فقدنا التفاصيل عندما قمنا بالتجريد، إنها ليست ترجمة مثالية، ولن يكون نموذج العالم متماثلًا مع العالم الحقيقي؛ هذا جيّد. إذا كنت تلعب في حفلة موسيقية صاخبة ارتجالية، فأنت في الغالب تحتاج فقط إلى معرفة تقدم الوتر والإيقاع والمفتاح الذي تستخدمه. إذا حاولت تحليل كل جانبٍ من جوانب تدفق الصوت القادم إلى أذنيك، تضيع بشكلٍ ميؤوسٍ منه، بدلًا من ذلك، تقوم بتجريده إلى الأساسيات، أنت مجرد تجريد. «النوتة» و«الأوتار» ليست كياناتٍ ملموسة في العالم الحقيقي، تعيش هذه المفاهيم في عالم النموذج، ولديها قواعد ارتباط داخلية، وتتوافق مع الأصوات في العالم الحقيقي، إنها بنيات نظرية مفيدة.

هذا هو المفتاح لنموذجٍ جيدٍ: عملية تجريد ذكية تأخذنا إلى وحدة أساسية ولكنها لا تزال مفيدة، مثل النوتة الموسيقية أو الوتر.

عندما نعمل داخل النموذج، نتظاهر مؤقتًا بأن هذه الأشياء هي في الحقيقة ذرات غير قابلة للكسر بقوانين ثابتة للسلوك، هذا ليس صحيحًا تمامًا: النغمة عبارة عن مزيج من النغمات والأصداء وترددات كل منها تتنقل، وتضغط طبلة الأذن، ولكن إذا كان من المفيد بناء نموذج صغير للعالم بحيث يكون صحيحًا، حيث تكون النوتة مجرد نوتة، حسنًا، ما الضرر في ذلك؟

أحيانًا تذهب عملية الاختزال هذه بعيدًا جدًّا، وعلينا أن نكون حذرين بشأن استخلاص استنتاجات عن العالم الحقيقي من النماذج المبسطة. غالبًا ما يكون من المناسب وضع افتراضات غير صحيحة

تمامًا، أو حتى افتراضات خاطئة بشكلٍ واضحٍ ومضحكٍ، علينا فقط تحقيق توازن جيد بين البساطة والفائدة. هناك نكتة قديمة حول أكاديمي اتصل بمزرعة ألبان للمساعدة في زيادة إنتاج الحليب، فقال: «لديَّ حلٌّ، لنفترض بقرة كروية».



إليك مثالًا آخر للنمذجة من علم الاقتصاد، لنفترض أن هناك بعض المنتجات التي يرغب الكثير من الأشخاص في شرائها، الصلصة الحارة على سبيل المثال، ثم يحدث شيء ما، مثل غزو الآفات في حقول الفلفل الحار، مما يقلل من كمية الصلصة الحارة التي يمكن إنتاجها.

ما سيحدث بعد ذلك هو أمر متوقع: سيرتفع سعر الصلصة الحارة، هذا هو نوع الانتظام في العالم الحقيقي الذي يفسح المجال تمامًا للنمذجة، عندما يكون هناك نقص مفاجئ في شيء ما، يرتفع سعره عادةً.

بالطبع، «السعر» ليس في الحقيقة مجرد رقمٍ واحدٍ. يعتمد ذلك على المكان الذي تشتري منه الصلصة الحارة، ومن يبيعها لك، وكيف يعمل نموذج العمل الخاص بهذا الشخص، وربما حتى مدى ثرائك الذي يعتقده هذا الشخص. عندما يحدث النقص، قد يستمر البائعون

الذين لا يسمعون عن ذلك على الفور في بيع الصلصة الحارة بالسعر الأصلي حتى نفاد الكمية. أو قد يرفض المشترون الذين لا يعرفون شيئًا عن النقص شراءه بسعر أعلى، أو قد يكون هناك توقع داخل مجتمعٍ معين حول «السعر العادل» للصلصة الحارة، ويمكن مقاطعة البائعين بسبب ارتفاع الأسعار.

من الصعب تخيل شيء أكثر تعقيدًا، مع وجود أجزاء متحركة أكثر من السعر.

ولكن عندما نقوم بعمل النمذجة، يمكننا أن نفترض افتراضًا مبسطًا بأن السعر هو مجرد رقمٍ واحدٍ، وهو نفسه في كل مكانٍ، يمكننا أيضًا أن نفترض أن «منحنى الطلب» و«منحنى العرض» (المزيد من التجريدات التي اخترعت من أجل ملاءمة نمذجتنا) هي دوال بسيطة، بناءً على السعر، تخبرك بالضبط بكمية الصلصة الحارة التي تريدها والكمية التي ستنتج. يمكننا أن نفترض أنه في «السوق التنافسية» (فكرة مجردة أخرى)، سيستقر كل شيء بين «سعر التوازن» (وسعر آخر).

داخل العالم النظري المبني على هذه الافتراضات، يمكننا حل التوازن وإعادة تحويله إلى تنبؤ بما سيكون عليه السعر في العالم الحقيقي، وفي بعض الحالات، يقدم نموذج العرض والطلب هذا تنبؤات جيدة جدًّا.

بالطبع، يجب أن نكون حذرين بشأن الافتراضات التي نتخذها، أحد الافتراضات المعيارية للاقتصاد الكلاسيكي الجديد هو أن البشر فاعلون عقلانيون: أن لدينا تفضيلاتٍ فطرية ومتسقة، وأننا نبحث

عن الوظائف ذات الأجور الأعلى والمنتجات الأقل سعرًا، وأن لدينا معلومات كاملة عن كل شيء تقريبًا. معظم هذا ليس دقيقًا في العالم الحقيقي، هذه افتراضات مبسَّطة تسمح لنا بعمل تنبؤات، إذا تحققت التوقعات، فهذا عظيم! النموذج مفيدٌ، هذا لا يعني أن الافتراضات صحيحة. هناك العديد من الطرق التي لا يتصرف بها البشر بشكلٍ عقلاني: نحن نفرط في تجنب المخاطرة، ولا نخطط للمستقبل جيدًا، ونشتري أشياء باهظة الثمن لاستعراض ثروتنا، ونميز، ونمنح الوظائف لـ الأصدقاء والعائلة أكثر من الغرباء المؤهلين، والقائمة تطول وتطول، إذا حاولت تطبيق النماذج القياسية على هذه الحالات، فسوف تتعطل وتضع توقعات سيئة.

هذه نقطة مهمة حول النمذجة بشكلٍ عامٍّ: النموذج يعمل فقط ضمن نطاق معين. قد تكون الافتراضات التي تستخدمها لعمل تنبؤات جيدة في مجالٍ واحدٍ (مثل الاقتصاد) مختلفة تمامًا عن الافتراضات التي تستخدمها لعمل تنبؤاتٍ جيدة في مجالٍ آخر (مثل علم الاجتماع)، هذا لا يعني أن أحد النماذج صائبٌ والآخر خاطئ، هذا يعني فقط أنك يجب أن تعرف متى تستخدم أي الملفات. إذا كنت تعتقد أن لديك نموذجًا واحدًا متسقًا يعمل في جميع السياقات، فمن المحتمل أنك تتجاهل أو تقلل من أهمية السياقات التي لا تكون صالحة فيها، لا يوجد نموذجٌ مقدسٌ.

مثال آخر: هل سبق لك أن شاهدت فيلمًا، وفي منتصفه تقريبًا، تمكنت من التنبؤ بمعظم ما سيحدث في بقية الفيلم؟ عندما تفكر في

الأمر، يكون هذا إنجازًا رائعًا جدًّا، كيف يمكنك أن ترى المستقبل هكذا؟ يجب أن يكون لديك نموذجٌ عقلي لـ «كيفية عمل الأفلام عادةً» الذي طورته من مشاهدة الأفلام طوال حياتك. يمكنك تبسيط تدفق المعلومات التي تصل إلىٰ أذنيك وعينيك، وتحويل وحدات البكسل إلى وحدات مجردة مثل الشخصيات، والحوار، والدوافع، والعلاقات.

ثم تقوم بتطبيق بعض القواعد غير المعلنة: «إذا أظهروا بندقية محشوة، فسيطلقون النار قبل انتهاء الفيلم» أو «تلك الشخصية التي تتسم بالعنصرية الشديدة ستحصل بالتأكيد على عواقبها» أو «حول آخر عشرين دقيقة من الفيلم» سوف ينفصل البطل عن هذا الخلل في الشخصية، ولكن بعد ذلك سيتعلم درسه ويقوم بإيماءة رومانسية كبيرة وسوف يجتمع مع أحبائه بشكلٍ كبيرٍ وسيعيشون في سعادة دائمة»، بالتأكيد، هذه ليست قواعد رياضية صارمة، والتنبؤات قد لا تكون دقيقة في كل مرة، لكنك لا تزال تقوم ببعض النمذجة الأولية، أنت تبني مجموعة من القواعد في رأسك يمكنك تطبيقها عبر مجموعة متنوعة من الظروف الواقعية المماثلة.

وفي الحقيقة، عندما يتعلق الأمر بذلك، هذا ما يحدث في رؤوسنا طوال الوقت، نحن نفسر العالم من حولنا ليسِ على أنه ومضات من الضوء والصوت، نحن نقسمها أشياء، كيانات، وحدات تحليل نتوقع أن تتصرف بطرقٍ معينة. نرى شيئًا نصنفه على أنه «سيارة» وشيئًا نصنفه على أنه «ضوء أخضر»، ونعتقد أن السيارات تتحرك عندما تكون الإشارة خضراء، إذا عبرت الشارع الآن من المحتمل أن أتعرض للإصابة. يدور الإدراك والوعي البشريان حول التعرف على الأنماط، وللتعرف على

الأنماط، يتعين علينا أولًا تجريد الواقع الغامض المستمر من حولنا إلى كائنات منفصلة يمكن أن تتصرف بطرقٍ نمطية.

لاحظ أيضًا: أن النماذج ليست رياضية بالضرورة، يمكن أن تكون القواعد الداخلية لعالم النموذج قاسية ونوعية، أشياء مثل «تجاذب الأضداد» أو «الطيور على أشكالها تقع». إذا كان هناك أي شيء، فسيكون من الأسهل بكثير بناء هذه الأنواع من النماذج غير الرياضية. من السهل جدًّا إثبات خطأ النموذج الذي يقوم بتنبؤات رقمية دقيقة.

وهذا هو السبب في أنه من المدهش أن عالمنا يجعل نفسه مناسبًا جدًّا للنمذجة الرياضية، هناك عددٌ كبيرٌ من الأشياء، إذا أوليتها اهتمامًا جيدًا، فستصرخ عمليًّا لك لاستخدام الرياضيات لوصف سلوكها.

هنا، خذ مثالًا لأي شيء صغير، مفاتيحك ستفي بالغرض، اقذفها من يدك اليسرى وامسكها بيدك اليمنى، المسار الذي تسلكه عبر الهواء هو قطع مكافئ مثالي. بغض النظر عن كيفية رميها، ستتبع دائمًا مسارًا مكافئًا، إنه ينشئ شيئًا رياضيًّا، شكلًا هندسيًّا دقيقًا، في الحياة الحقيقية!

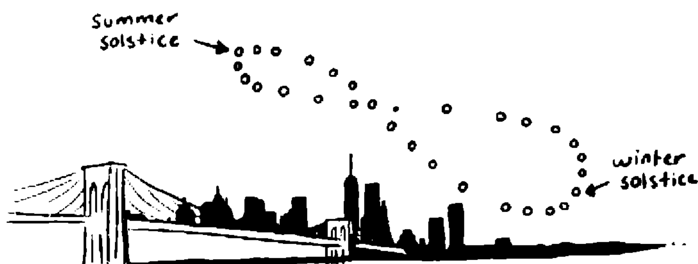


أو خذ قطعة من الخيط وعلِّقها بين نقطتين، سوف تستقر في شكلٍ سلسلي catenary، نسخة طبق الأصل من رسم بياني يسمى جيب التمام الزائدي hyperbolic cosine. أسلاك الهاتف، والقلائد الخفيفة،

والحبال المخملية لكبار الشخصيات، بغض النظر عن المادة، ستظل دائمًا بنفس الشكل. (معادلة هذا الشكل، بالمناسبة، تتضمن عددًا غير كسري يسمى **e** ينشأ من دراسة الفائدة المركبة compound interest، وليس له أي دور مطلقًا في المعادلة الخاصة بكيفية تعليق السلاسل).

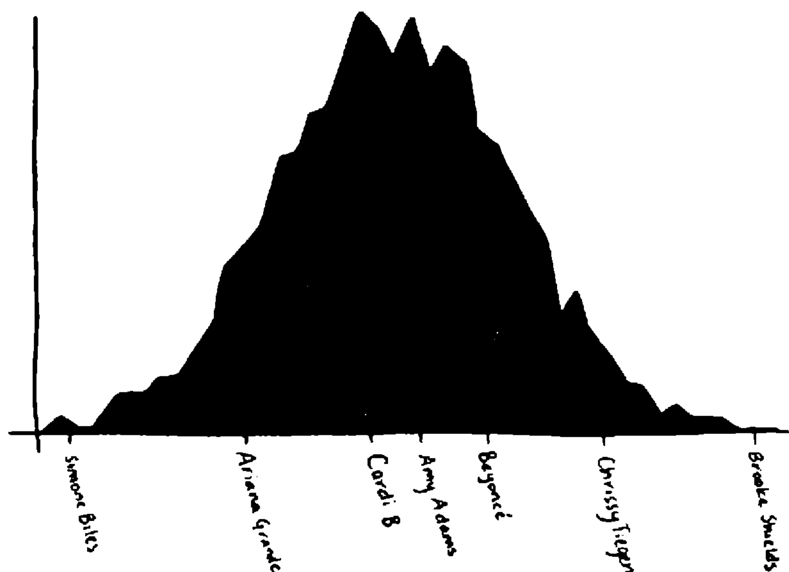


شكل آخر، ربما يكون أكثر عمقًا. قُم بإعداد كاميرا على حامل ثلاثي الأرجل ووجِّهها نحو السماء، اختر وقتًا من اليوم لالتقاط صورة. اتركها في نفس الموضع بالضبط، والتقط صورة في نفس الوقت في اليوم التالي ثم اليوم التالي، واستمر في فعل ذلك كل يوم لمدة عام. سيرسم مسار الشمس على مدار عام شكلًا رياضيًّا يسمى الأنالمة (مخطط الميل) analemma (هو خط وهمي ذو شكل رقم 8، تحدده الأجرام السماوية الجارية حسب أوضاعها الموافقة للتوقيت المتخذ عند تحركها).

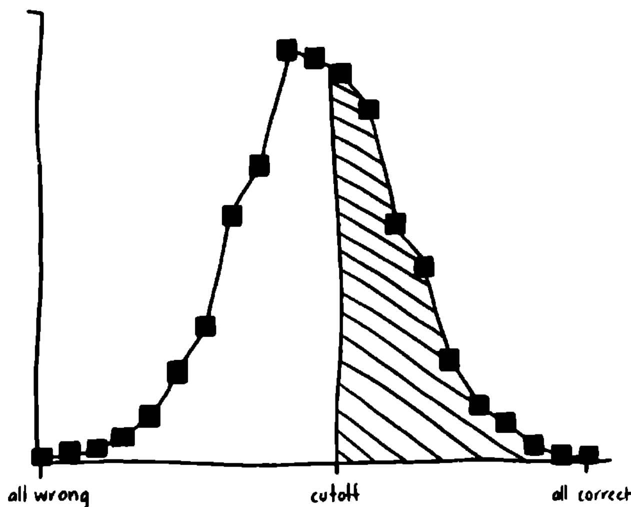


إنني أقدم لك أمثلة على الأشكال المعقدة، لأن الأشكال الرياضية البسيطة شائعة جدًّا في الطبيعة إلى درجة أننا بالكاد نلاحظها. عندما تنفخ فقاعات الصابون فإنها تشكل كريات مثالية، عندما تسقط حصاة في بركة، ستنتقل التموجات في دوائر كاملة، لا تبدو هذه الأمثلة مدهشة بدرجة كافية، لكنها تشير أيضًا إلى وجود نوعٍ من المنطق الرياضي الذي يعمل خلف الكواليس.

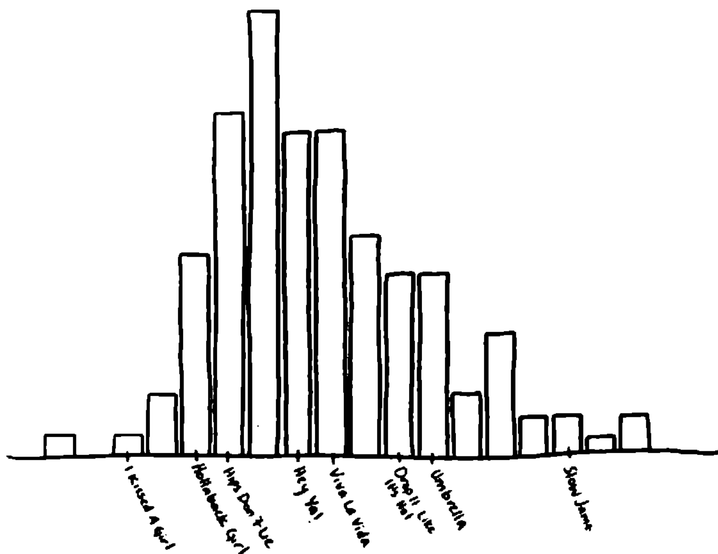
هذا التكرار الغريب للظواهر الرياضية في العالم الطبيعي يتجاوز بكثيرٍ الأشكال الفيزيائية. مثال آخر مألوف، الذي يجب ألا نأخذه كأمرٍ مسلَّم به، هو منحنى الجرس: صيغة للتنبؤ بتوزيع أي خاصية عددية تقريبًا في أي مجموعة بيانات تحدث بشكل طبيعي. هنا، على سبيل المثال، هو توزيع طول القامة للمرأة في للولايات المتحدة:



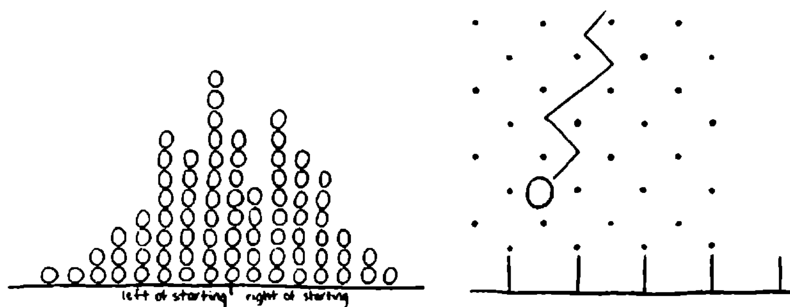
وإليك توزيع الدرجات في امتحان نقابة المحامين متعدد الطبقات multistate bar exam:



فيما يلي توزيع لأطول الأغنيات صمودًا في تصنيفات بيلبورد Billboard:

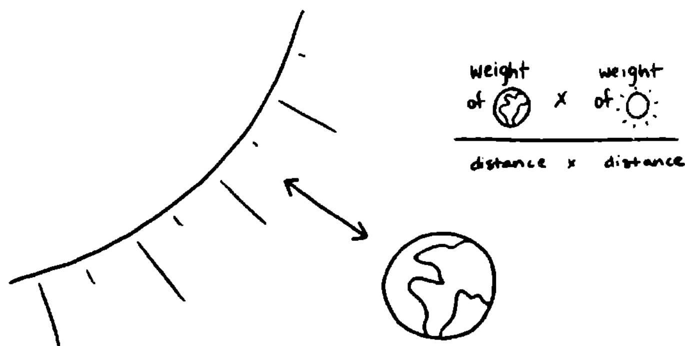


وإليك توزيع المكان الذي تنتهي فيه الكرة في لعبة Plinko من برنامج الألعاب الأمريكي The Price Is Right:

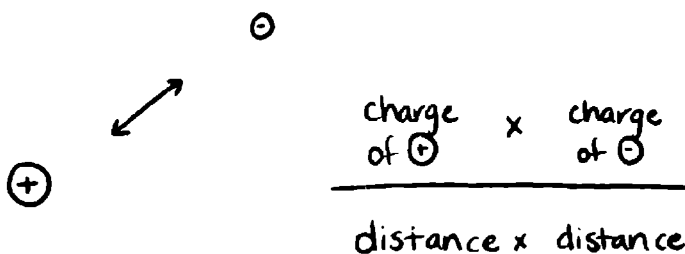


لا، إنه ليس بالضبط نفس الشكل في كل مرة، عليك أن تسمح ببعض العشوائية. ولكن كلما كان حجم العينة أكبر، بشكلٍ عامٍّ، اقتربت من منحنى سلس يشبه الجرس المتماثل. (معادلة هذا المنحنى، بالمناسبة، لا تتضمن فقط e -رقم الفائدة المركبة أو ثابت أويلر ويساوي تقريبًا ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨- ولكن أيضًا، نسبة محيط الدائرة إلى قطرها π بعد نقطة محددة، ألا يبدو هذا مثل نكتة كونية؟).

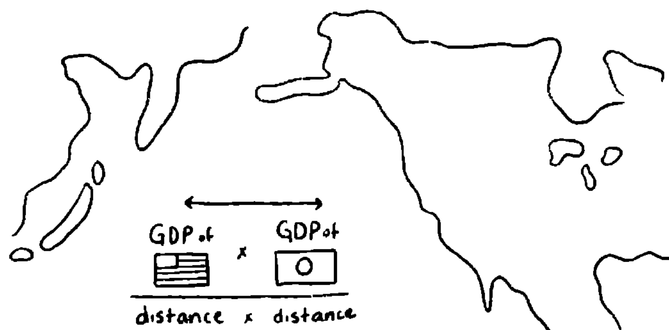
هذا هو الأمر الأغرب بالنسبة إلي، عندما تظهر نفس الصيغة بالضبط في مجالات مختلفة من الدراسة، في سياقات غير مرتبطة تمامًا ولا يبدو أنها يجب أن تكون متشابهة. لذلك، على سبيل المثال، تخبرنا معادلة الجاذبية الشهيرة قوة التجاذب بين جسمين عيانيين (يمكن رؤيتهما بالعين المجردة) إذا عرفنا كتلتهما:



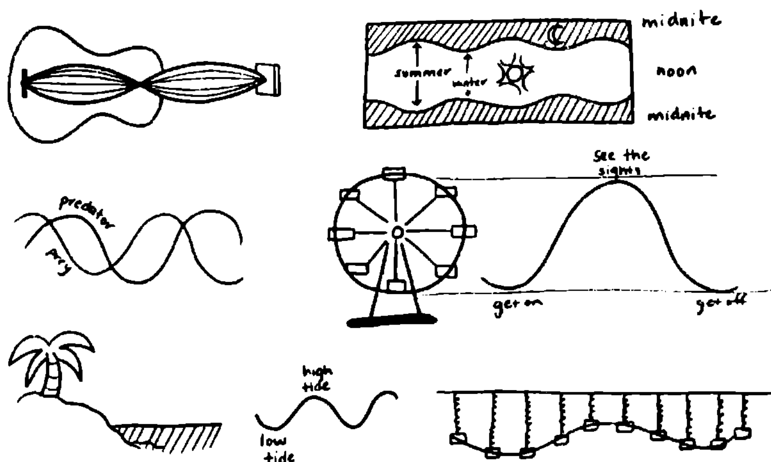
لكنه يخبرنا أيضًا عن قوة الجذب أو التنافر بين جسيمين مجهريين إذا عرفنا شحناتهما:



و(خذ حذرك) يمنحنا أيضًا تقديرًا جيدًا لمقدار التجارة بين بلدين إذا عرفنا ناتجهما المحلي الإجمالي:



الأفضل من ذلك، أن العملية الرياضية المعروفة باسم «الحركة التوافقية البسيطة- simple harmonic motion» تصف بشكلٍ مماثل اهتزاز النقر على وتر، وطول اليوم(٧) ومتوسط درجة الحرارة على مدار عام، وعدد الأنواع في العلاقات بين المفترس والفريسة، وارتفاع نقطة على دائرة دوارة، ومستوى المد والجزر، وانضغاط الزنبرك.



ماذا يجري بحق الجحيم هنا؟ تذكر أن هدفنا من صنع النماذج هي أن تكون مفيدة، وأن نجد نظامًا لطيفًا ومريحًا لتلخيص ما نلاحظه بطريقة منظمة. يمكن أن تتخذ قواعد النموذج أي شكلٍ، سواء كان تقريبيًا أو دقيقًا. لكن لسببٍ ما، مرارًا وتكرارًا، نجد أن أفضل نموذج للعالم هو القواعد الرياضية، التي تعمل بدقة عالية ومدهشة، وتكرر نفسها أحيانًا من مكان إلى آخر.

بالمناسبة، في كل حالة تقريبًا، جاءت الرياضيات أولًا تاريخيًا،

لطالما درس علماء الرياضيات البحتة كل ما رأوا أنه ممتعٌ، ولكن ما يحدث عادةً هو أنه بعد مئات السنين من تحديد مجال جديد من الرياضيات واستكشافه، ينبثق مجالٌ جديدٌ من العلوم التجريبية يتطلب بالضبط نفس المفاهيم والنتائج الرياضية. نحن لا نبتكر الرياضيات لتناسب عالمنا، نحن نكتشف ماهية الرياضيات الموجودة فيه، ثم ندرك لاحقًا أن عالمنا يشبه هذه الرياضيات.

كيف يمكن أن نفسر هذا؟ لماذا يبدو العالم مناسبًا للنمذجة الرياضية؟

الجواب الأمين والأصدق هو أنه لا أحد يعرف في الحقيقة على وجه اليقين.

هذا موضوع ساخن للنقاش بين فلاسفة الرياضيات، ولن أتظاهر أنني أعرف الإجابة. داخل مجتمع الرياضيات البحتة، على الرغم من ذلك، توجد نظرية واحدة تحظى بشعبية كبيرة، لن يخرج الناس ويقولون الأمر على هذا النحو تمامًا، لكنني اخترت هذا الرأي بين عددٍ كافٍ من الأشخاص للشعور بالثقة قائلًا إن الكثير منا يعتقد أنه الصحيح.

ربما نرصد الأنماط الرياضية في الطبيعة لأن العالم نفسه مصنوع من الرياضيات.

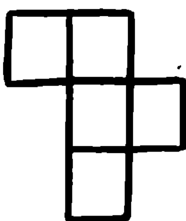
ربما يكون الكون ذا طابعٍ رياضي في الأساس، وهناك نموذج واحد حقيقي يصف سلوكه تمامًا.

دعونا لا نتلفظ بالكلمات: هذا يبدو جنونيًّا.

لكن..

اسمع منًّا.

•



الآلية أو الأتمتة Automata

كيف يمكن للعالم أن يكون مكونًا من الرياضيات؟ دعني على الأقل أجعل الفكرة معقولة.

من المحتمل أن تكون قد رأيت عوالم مصنوعة من الرياضيات من قبل.

يطلق على هذه العوالم اسم المحاكاة.

بالتأكيد، في معظم الأوقات تكون المحاكاة مجرد عالم صغير غريب الأطوار نادر الأحداث والأشياء.

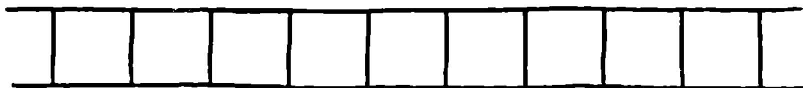
كائنان لهما سلوك يمكن التنبؤ به يمثلان بعض السيناريوهات المكتوبة مسبقًا.

هذا بعيدٌ جدًّا عن عالمنا الذي لا يمكن التنبؤ به والذي يعج بالتفاصيل المعقدة، ولكن علينا أن نبدأ من مكان ما.

اخترع علماء الرياضيات المحاكاة قبل وجود أي أجهزة كمبيوتر بفترة طويلة، إذا كانت المحاكاة بسيطة بما يكفي، فيمكنك إجراؤها يدويًّا، إنها مجرد لعبة ورقة وقلم للتسلية وتمضية الوقت.

نقول عادةً «آلي» بدلًا من «محاكاة»، لكنها نفس الفكرة. هناك قواعد محددة مسبقًا لكيفية تحرك كل شيء، يمكنك اختيار إعداد البداية، ثم ترك اللعبة تعمل ومتابعة ما سيحدث.

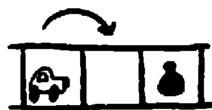
إليك محاكاة بسيطة يمكننا تنفيذها يدويًّا، العالم عبارة عن طريق من مسارٍ واحدٍ مقسم إلى صناديق منفصلة.



الشيء الوحيد الموجود في هذا العالم هو السيارة؛ تتصرف السيارة وفقًا لقواعد الحركة التالية:



move two if no obstacles

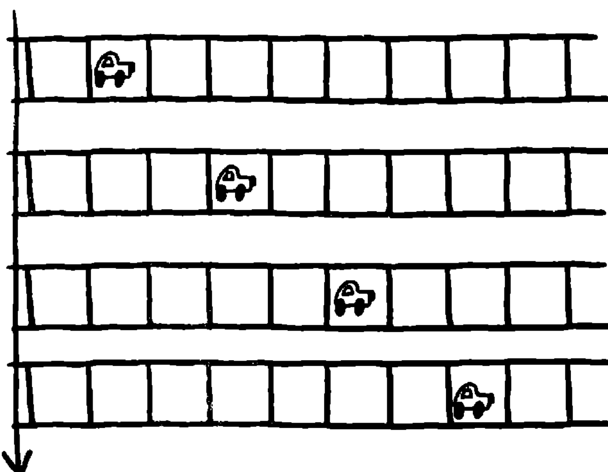


move one if something is two cells away



don't move if next cell is full

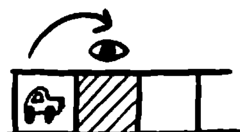
إذا وضعنا سيارة واحدة على الطريق و«اضغط على «تشغيل»» أو بدء اللعبة، فليس من الصعب تخمين ما سيحدث بعد ذلك.



ماذا لو بدأت بتشكيلة من خمس سيارات؟ إنه عملٌ مرهقٌ بعض الشيء، لكن ليس كثيرًا. ستحرك السيارة تلو السيارة، وستتحقق من المسافة التي يجب أن تتحرك بها، وتكرر الأمر لكل خطوة زمنية؛ أنت تلعب دور الكمبيوتر، وما تقوم به يعرف أيضًا ببعض الحوسبة البدائية.

time

هذه هي الأتمتة أو الآلية كمبدأ أساسي (في بُعدٍ واحدٍ one-dimensional، متقطع discrete، حتمي deterministic)، ولكن هذا جيد بما يكفي لإعادة إنشاء بعض ظواهر العالم الحقيقي، على سبيل المثال، يمكننا إضافة قاعدة إلى الفضوليين (الأشخاص الذين يحبون التوقف والتحديق إلى حوادث المرور):



move one if passing a gawk spot

لنبدأ الآن بخطٍّ لا نهائي من السيارات، متباعدة بطول سيارتين، وتقترب من بقعة تحديق مزعجة.



ماذا يحدث عندما نشغل المحاكاة؟

يبدأ الحادث تأثير التموج (البلبلة)، مما يؤدي إلى إبطاء السيارات التي تقف خلفه، ولكن بمجرد تجاوزه، ستعود إلى سرعة الانطلاق.

يبدو صحيحًا، أليس كذلك؟ تشبه الآلية نموذجًا في أثناء الحركة، وهو نموذج يعاد إحياؤه.

إذا كنت ترغب في ذلك، يمكنك أن تتحقق من عملي: كل سيارة، في كل خطوة زمنية، تتحرك وفقًا لقواعد الحركة الأربعة. يمكنك أيضًا

إعادة تشغيل المحاكاة بنفسك على قطعة من ورق الرسم البياني، أو تجربة سيناريوهات بداية جديدة لمعرفة ما سيحدث؛ يجد بعض الناس هذا النوع من الأشياء رتيبة ومؤلمة، بينما يجدها آخرون مسلية وعلاجية.

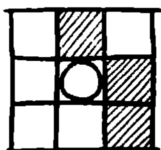
يمكن تصنيف ما تحدثنا عنه سابقًا في فئة «طريقة بسيطة للغاية بحيث لا يمكن أن تشبه أي شيء في العالم الحقيقي»، نعم هذا صحيح، يمكننا إعادة إنشاء بعض الأنماط الأساسية، لكننا نعلم جميعًا أن السائقين البشريين الحقيقيين أكثر تعقيدًا من الالتزام بأربع قواعد منتظمة. لديهم انحرافات وتشنجات عضلية وأماكن يرغبون في التواجد فيها سريعًا. بالإضافة إلى ذلك، إذا كنَّا نهدف إلى نموذجٍ حقيقي لكل شيء، فعلينا إعادة إنشاء ليس فقط السيارات التي تتحرك على الطريق، ولكن الطيور التي تطير بجانبنا، وهدير المحركات، والأحوال الدولية التي قد نسمعها في الراديو، وضغط الدم في أوعية كف اليد اليسرى لبهلوان يغفو في أثناء المرور على بضع بلدات، من الواضح أن «نموذج» السيارة الآلية الأساسية الذي اقترحناه في هذا المثال لـن يرقى إلى المستوى المطلوب.

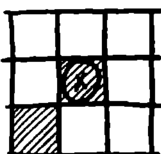
يبدو هذا عادلًا بما فيه الكفاية! نحن فقط «نستعد» (ما زلنا نجهز أنفسنا)، دعونا الآن نلقي نظرة على أشهر آلة على الإطلاق. لا يزال الأمر أسهل بكثير من عالمنا الحقيقي، ولكنه يولد بعض السلوك الذي قد يجعل من المعقول أن يكون عالمنا آلية معقدة للغاية،

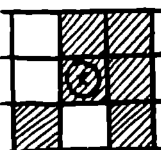
إنها تسمى، تقريبًا، لعبة الحياة.

مثل مثال السيارة، هذا العالم يتكوَّن من خلايا مربعة منفصلة. في لعبة الحياة، العالم عبارة عن شبكة ثنائية الأبعاد، تمتد إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات، تحتوي كل خلية على حالتين محتملتين: تشغيل أو إيقاف. على عكس مثال السيارة، لا تمثِّل هذه الخلايا أي شيء معين في العالم الحقيقي، إنها مجرد مربعات يمكن تشغيلها أو إيقافها، سوداء أو بيضاء، ممتلئة أو فارغة.

هناك ثلاث قواعد تحدد كيف يلعب كل شيء في لعبة الحياة، تقرر كل خلية ما إذا كانت سيتم تشغيلها أو إيقافها في الخطوة الزمنية التالية عن طريق التحقق من أداء جيرانها الثمانية (بما في ذلك الخلايا الموجودة على الأقطار) في هذه الخطوة الزمنية.



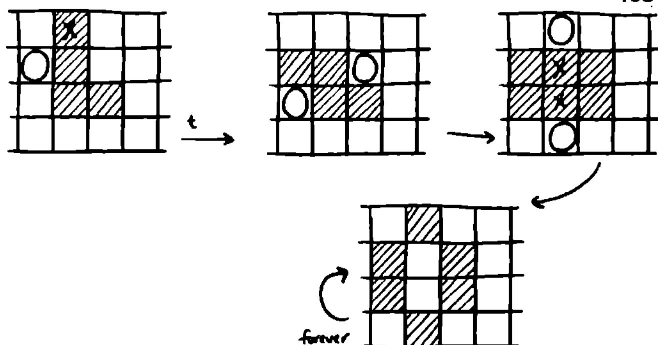




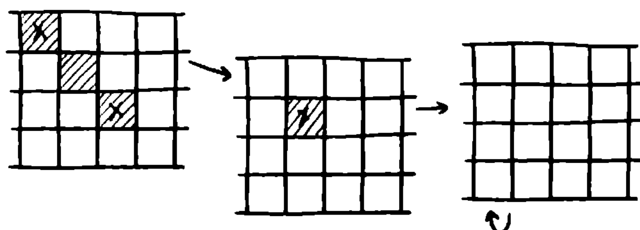
يصعب تنفيذ هذه الآلة ذاتية التشغيل automaton يدويًّا، نظرًا إلى وجود المزيد من الخلايا يجب التحقق منها في كل خطوة، ولكن إذا

كنت منظمًا حول هذا الموضوع، وتوصلت إلى تدوينٍ متسقٍ، يمكنك تشغيل المحاكاة من أي إعدادات بدء ومعرفة ما سيحدث.

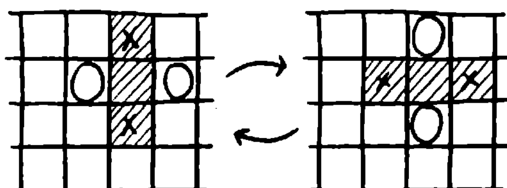
تستوي بعض الإعدادات في حالة استقرار، وتبقى على هذا النحو إلى الأبد.



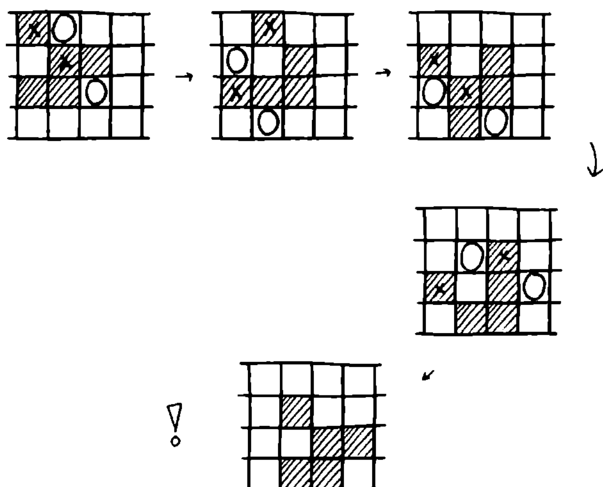
سرعان ما يتلاشى الآخرون إلى العدم.



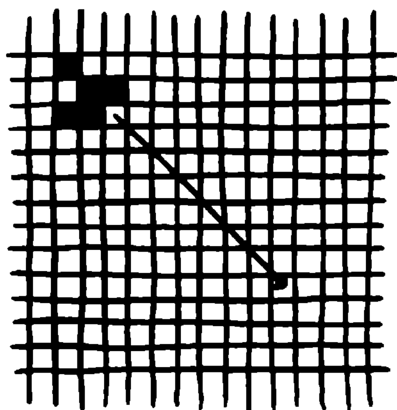
يتطور البعض الآخر إلى «وميض» ينقلب ذهابًا وإيابًا بين حالتين إلى الأبد.



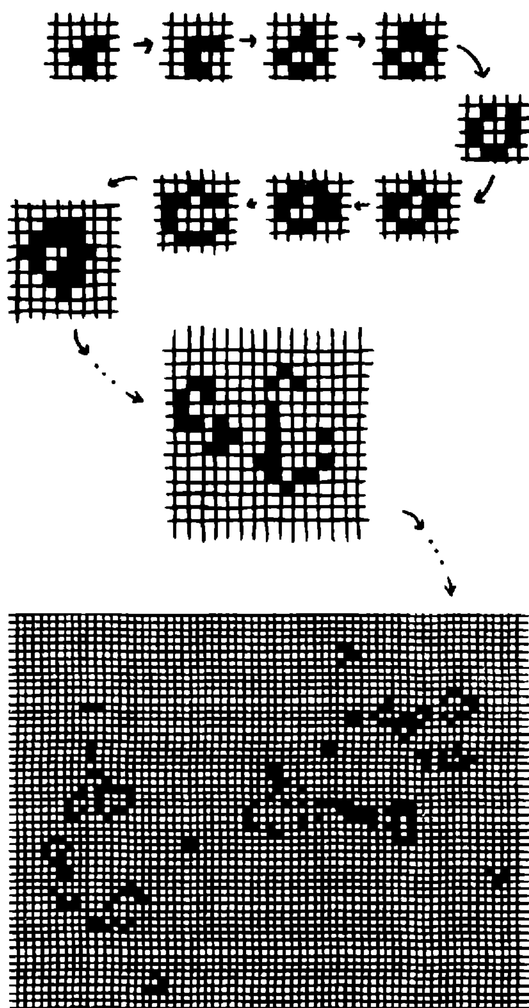
بعض الإعدادات عبارة عن «طائرة ورقية» تدور مرة أخرى إلى نفس النمط الأولي، ولكنها تتحول إلى الأسفل وإلى اليمين.



تسمى هذه الحالة بالطائرة الورقية لأنها، على مدار دورات متعددة، تنزلق إلى الأبد عبر شبكة الخلايا.



ثم بعض الإعدادات الأخرى، حسنًا.. .



ينفجر مثل لعبة بينتومينو R-pentomino، هذا الإعداد المكون من خمس خلايا، في نظام من الأجزاء المتفاعلة، مما يؤدي إلى توليد الأشكال الساكنة وأنماط الوميض، وأنماط الطائرة الورقية، والتطور والنمو لتغطية مساحة ضخمة من المسرح. يستوي أخيرًا في نمطٍ مستقرٍّ

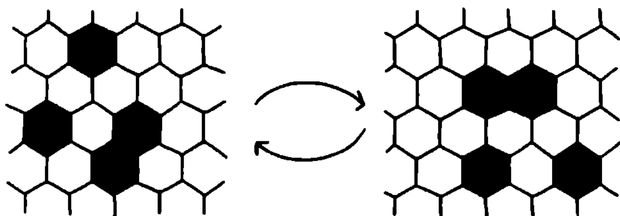
متكرر بعد ألف خطوة زمنية، ولكن لفترة من الزمن قبلها تبدو كأنها شبيهة جدًّا بالحياة، (في هذه المرحلة، لا يُنصح بإجراء الحساب يدويًّا).

هذا ليس نادرًا جدًّا في لعبة الحياة. في بعض الأحيان، ينتج عن النمط الأولي البسيط بشكلٍ عفوي عالمًا كبيرًا وفوضويًّا مليئًا بهياكل مستقرة تتحرك وتتفاعل بمرور الوقت بطرق مثيرة للاهتمام وغير واضحة، ألا يبدو ذلك مألوفًا؟

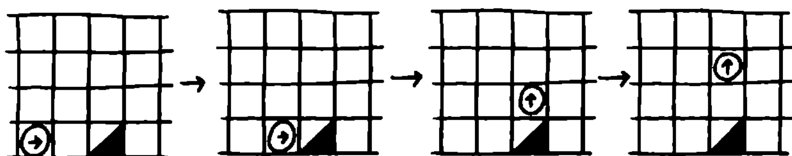
هناك نمط بداية يؤدي إلى نمو لا نهائي، من خلال إطلاق تدفق لا نهائي من نمط (الطائرات الورقية) على فترات منتظمة. هناك نمط يسمى «السير روبن Sir Robin» ينجرف عبر المسرح مثل قطعة الحصان في لعبة الشطرنج. هناك نمط يسمى «الجوزاء Gemini» الذي ينشئ حسابيًّا نسخة طبق الأصل من نفسه، بعد ملايين الخطوات الزمنية. (بالطبع: هناك مجتمع مكرس بشدة على الإنترنت يبحث عن هذه الأشياء ويمنح جوائز «النمط الفائز لهذا العام- Pattern of the Year») تقريبًا حول أي نوع من السلوكيات التي يمكن أن تتخيلها على شبكة من البكسلات pixels باللونين الأبيض والأسود، هناك نمطٌ لهذا.

هل ما زلت تعتقد أنه من السهل جدًّا أن تكون عالمنا؟ ربما أنت لست مخطئًا، نحن لا نعيش في عالمٍ مسطحٍ ومنفصلٍ أبيض وأسود. لعبة الحياة هذه -في هذه المرحلة، وبهذه القواعد- عشوائية، لقد اختيرت ليس لأنها تعكس الواقع، ولكن لأنه من السهل التعامل معها، لكن يمكننا اختراع الآلية بأي قواعد نريدها.

يمكننا ابتكار آلية باستخدام الأشكال السداسية وبالتالي قواعد اللعبة تكون سداسية المراحل:

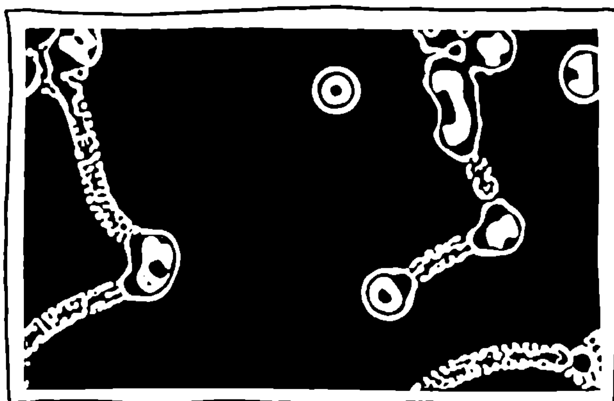


يمكننا إنشاء خلية واحدة بحيث تحتوي على أكثر من حالتين مختلفتين من الخلايا:



اعتمادًا على القواعد التي نختارها، يمكن لهذه العوالم الخيالية أن تظهر أنواعًا مختلفة جدًّا من السلوك، تنهار بعض العوالم بسرعة إلى لا شيء، بغض النظر عن النمط الذي تبدأ به، ويتفجر البعض الآخر مثل الانفجار الأعظم، من بكسل واحد.

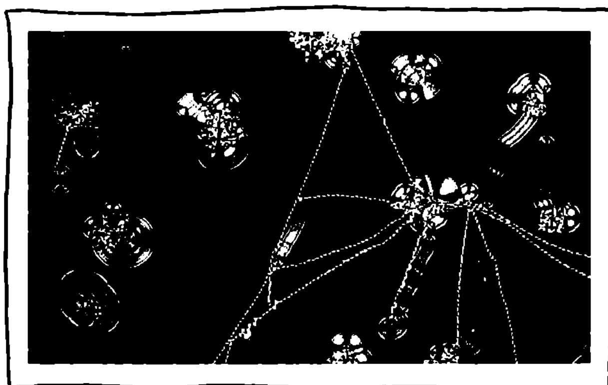
إذا كنت تفضِّل ألا تصنعها من وحدات البكسل تمامًا، فلا مشكلة: يمكننا أن نجعل الآلية تحدث في مرحلة مستمرة. هنا، لا تتعلق قواعد اللعبة بـ «عدد الجيران في وضع التشغيل» ولكن «نسبة البيئة المحلية في وضع التشغيل»، إليك الآلية التي تسمى الحياة السلسة SmoothLife، التي تبدو مخيفة مثل شيء يحدث في طبق بتري Petri dish:



سأعرض لك فقط مثالًا واحدًا من كل فئة واسعة من الآلية، ولكن ضع في اعتبارك أن الخيارات لا حدود لها. بعد اختيار بُعد ومساحة يمكنك وضع عالمك فيه، وبعد اختيار مجموعة من الأجسام الأولية أو حالات الخلية، لا تزال هناك مجموعة لا حصر لها من مجموعات القواعد المحتملة التي يمكنك تدوينها.

يمكن أن تكون حركة الأشياء وتطورها مستمرين أو منفصلين، حتمية أو صدفة، محددة محليًّا أو متأثرة بالحالة الكاملة للعالم في وقت معين، هناك تنوع مذهل في العوالم التي تجدها، فقط عن طريق تغيير معلم واحد بشكلٍ طفيفٍ في قاعدة واحدة.

هنا، على سبيل المثال، يوجد آلية أخرى مستمرة تسمى البلورية Crystalline:



هذا مجرد مزاح! هذا ليس آلية، إنها صورة حقيقية لبلورات سائلة تحت المجهر.

إذن، فهل من الصعب حقًّا تخيل وجود آلية تتولد هناك، حسنًا، إليك هذا..

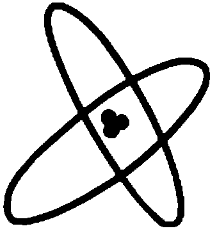
إذا كان هذا يجعلك تشعر بالغثيان وجوديًّا، فاعتبر هذه الفقرة تنبيهًا حقيقيًّا عن حرق الأحداث، يقدم الفصل الأخير من هذا الكتاب آلية خاصة تسمى النموذج القياسي لفيزياء الجسيمات. إنها آلية مستمرة ثلاثية الأبعاد تحتوي على سبعة عشر عنصرًا أساسيًّا ونحو اثنتي عشرة قاعدة للتطور، من ظروف بداية معينة، عندما تضغط زر التشغيل، حسنًا، ما يحدث بعد ذلك أمرٌ غريبٌ جدًّا.

النموذج القياسي هو أفضل نموذج اكتشفناه حتى الآن لإعادة إنشاء عالمنا بمصطلحات رياضية بحتة، هو ليس مثاليًّا، لكنه قريبٌ بما يكفي ليصبح قانونًا مخيفًا، مثل نسخة أحلام غريبة من الواقع، أو، اعتمادًا

على دينك، قد يبدو الأمر كأنه مستوى جديد أعلى من الواقع يجعل الحياة اليومية تبدو كأنها حلمٌ غريبٌ.

إذا كنت لا تريد أن ترى هذا (ومن حقك تمامًا ألا ترغب في إلقاء نظرة خاطفة على شفرة الخلق source code)، فأقترح أن تضع هذا الكتاب جانبًا الآن، صدقني، لن أشعر بالإهانة! أتمنى أن تكون قد استمتعت بنفسك وتعلمت بعض الأشياء طول الطريق، نهاية الكتاب، وداعًا، أتمنى لك إجازة سعيدة في نهاية أسبوعك!

ولكن إذا كنت ترغب في رؤيتها، إذا كنت تريد تكبير وحدات البكسل بحيث يمكن رؤيتها، فاستمر في القراءة؛ هذا الفصل الأخير لك، لكن تذكر أني حذرتك: كل ما أقدمه، حسنًا، ليس حتى الحقيقة بالضرورة، ولكنه طريقة مفيدة بشكل غير معقول للنظر إلى الأشياء.



العلوم Science

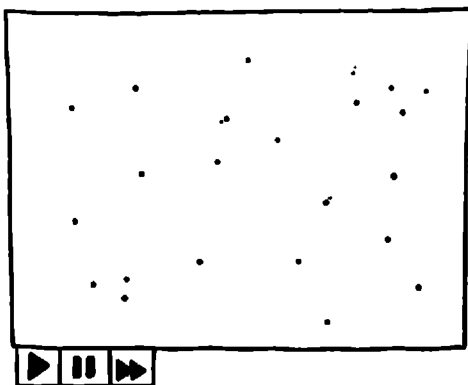
فيما يلي قواعد اللعبة الرياضية التي نسميها النموذج القياسي، لم تضبط القواعد بشكلٍ كاملٍ، وفي الحقيقة نحن نعلم أن النموذج الذي نعمل به في الوقت الحالي ليس صحيحًا تمامًا، لكنه قريب جدًّا، وإليك قواعد اللعبة.

ابدأ بفراغٍ ثلاثي الأبعاد، أيها؟ لسنا متأكدين، تذكر أن علماء الطوبولوجيا لديهم كتالوج كامل للمساحات ثلاثية الأبعاد التي تبدو محليًّا... مثل هذه. قام علماء الكونيات ببعض الأعمال لمعرفة شكل الكون، بناءً على مجموعة من النماذج والافتراضات الخاصة بهم. هذا ليس مهمًّا بالنسبة إلى أهدافنا، دعنا نقول فقط إننا نعمل مع فراغ ثلاثي، أساسي، لا نهائي، وغير منحنٍ.

لذلك لديك مساحة كبيرة من الفراغ الخالي، في أي نقطة في هذا الفراغ، يمكنك وضع جسم نقطي صغير للغاية يسمى «جسيمًا». الفضاء مستمر، لذلك أعني حقًّا عند أي نقطة، لا توجد خلايا مربعة هنا، وهذه الأشياء التي نطلق عليها اسم الجسيمات، لا تفكر فيها كأجرام سماوية

صغيرة ولامعة، إنها حرفيًّا مجرد نقاط، إنها لا تحتل مساحة، إنها نقاط رياضية ذات حجم صفري.

ليست كل الجسيمات متساوية: لها خصائص مختلفة قليلًا تحدد كيفية تحركها. عندما تقوم بإنشاء جسيم، عليك أن تعطيه «كتلة» (رقم موجب) و«شحنة» (موجبة، سالبة، أو صفر). ولا يمكنك اختيار أي كتلة وشحن فقط، هناك فقط سبع عشرة توليفة قانونية من الكتلة والشحنة للاختيار من بينها. نطلق على هذه المجموعات سبعة عشر جسيمًا أساسيًّا، ونعطي كل واحدة اسمًا لطيفًا مثل الـ«كوارك الساحر charm quark » أو « ليبتون تاو tau lepton ».

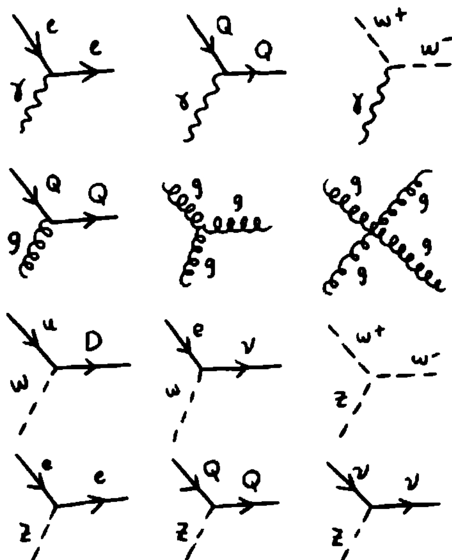


عندما تضغط زر التشغيل، ماذا يحدث للجسيمات؟ تتحرك عبر الفراغ وتتفاعل معًا، مثل أي **آلية**، هناك قواعد حسابية دقيقة تخبرك بما سيفعله كل جسيم بعد ذلك، بشكلٍ عامٍّ، تتحرك بسرعة كبيرة وفي خطوط مستقيمة.

الاستثناءات الوحيدة هي التفاعلات: عندما يتحلل الجسيم، أو عندما يقترب جسيمان أحدهما من الآخر، سيتعين علينا الرجوع إلى

جدول التفاعلات المفيد الذي دونَّاه لمعرفة ما سيحدث بعد ذلك. اعتمادًا على هويات الجسيمات المتفاعلة، قد تتصادم وتتناثر في اتجاهاتٍ مختلفة، أو تتحد لتشكل جسيمًا واحدًا جديدًا، أو (إذا كانت تتقابل بسرعة كافية) قد تنفث مدفعًا من الجسيمات الجديدة.

إذا كنت فضوليًّا كفاية، فإليك قائمة بجميع تفاعلات الجسيمات الأساسية طبقًا للنموذج القياسي:



يُظهر الأول، على سبيل المثال، إلكترونًا يمتص فوتونًا ويغيِّر اتجاهه، يمكن أن تعمل هذه التفاعلات أيضًا في الاتجاه المعاكس، على سبيل المثال، يمكن للإلكترون أيضًا أن يصدر فوتونًا ويغير اتجاهه.

ربما أقدم لك تفاصيل غامضة، لكن ليس لديَّ الكثير من الخيارات، هذه ليست لعبة الحياة، حيث يكفيك أن تقوم بحساب عدد الصناديق

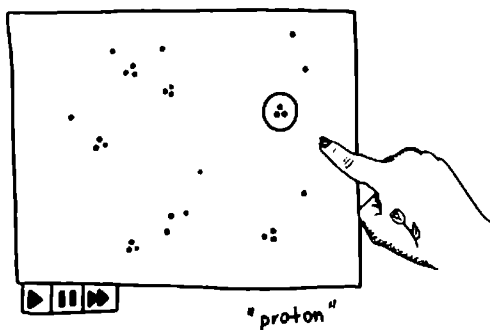
لمعرفة ما سيحدث لاحقًا. القواعد الدقيقة لتفاعلات الجسيمات في النموذج القياسي سخيفة، لأكون صادقًا معك. تتضمن الحسابات المجاميع المتصلة والأرقام الخيالية وثوابت الاقتران وجميع أنواع الرياضيات السخيفة التي تحرم طلاب الدراسات العليا في الفيزياء من النوم، إنها عملية منهجية نظامية، ولكنها ليست عملية دقيقة وبسيطة.

لتوفير الوقت والمال في التعلم، سأقدم لك ملخصًا سريعًا، إليكَ وصفًا تقريبيًّا لما ستراه إذا نثرت بعض الجسيمات عبر الفراغ وقمت بتشغيل المحاكاة.

في اللحظة الأولى، هناك موجة هائلة من النشاط، معظم الأنواع السبعة عشر من الجسيمات غير مستقرة، وتخضع على الفور تقريبًا لتفاعلات التحلل، وتنقسم إلى جسيماتٍ أصغر ومستقرة. بعد هذا الانفجار الأولي، لن يتبقى لك سوى أنواع قليلة مختلفة من الجسيمات، وثلاثة فقط تحتاج إلى المراقبة: الكواركات العلوية، والكواركات السفلية، والإلكترونات.

بعد ذلك، مع تقدُّم الزمن إلى الأمام، تظهر الأنماط، تبدأ في رؤية الكواركات تتكتل معًا في شكل ثلاثيات، لا يوجد قانون في النموذج القياسي ينص على أن الكواركات يجب أن تتكتل في ثلاثيات (أو مجموعات ثلاثية)، ولكن هذا ما يحدث. تتفاعل ثلاثة كواركات معًا بطريقة تجعلها متجمعة هكذا. كما هو الحال في لعبة الحياة، تبدأ الهياكل المستقرة في التشكل بمرور الزمن من خلال التطبيقات المتكررة لنفس القواعد الأساسية.

في الواقع، هذا الميل نحو الثلاثيات قوي جدًّا إلى درجة أنه بعد انتهاء الإثارة المبكرة، لا يمكنك رؤية كوارك بمفرده، دائمًا مجتمع في ثلاثيات، في بعض الأحيان تتجمع في سداسيات أو تاسوعيات، أو أي من مضاعفات الثلاثة، ولكن في معظم الأحيان تكون ثلاثة فقط، وتطير معًا في خط مستقيم. في هذه المرحلة، لم تعد كلمة «كوارك» مفيدة بعد الآن، من الأفضل أن تتحدث عن القطعة الثلاثية من الكواركات ككل، منعًا للإرهاق ولحفظ أنفاسك. لقد قمنا بصياغة بعض المصطلحات الجديدة، كواركان علويان وكوارك سفلي واحد، هذا ما نسميه «بروتون»، كواركان سفليان وواحد إلى أعلى؟ «نيوترون».

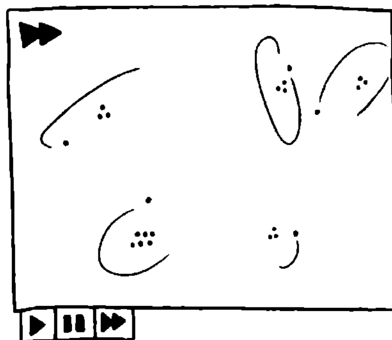


ومن ثَمَّ ما الذي يحدث لاحقًا؟ تظهر المزيد من الأنماط والانتظامات من قواعد التفاعل.

بينما تشاهد ما يحدث، تلاحظ أن الشحنات الموجبة والشحنات السالبة تتجاذب معًا، بينما تتنافر الشحنات المتماثلة. مرة أخرى، هذا ليس من ضمن القواعد، الجسيم هنا لا «يعرف» شحنة الجسيم هناك. يتفاعلون فقط مع الجسيمات الأخرى في محيطهم المحلي (القريب)،

ويتغير مسارهم كما تتغير مسارات الجسيمات التي إلى جوارها وتتفاعل معها. وهذا التحول في المسارات لها انحياز يتراكم بمرور الوقت: تتحرك ذوات الشحنة الموجبة تدريجيًّا نحو ذوات الشحنات السالبة وتبتعد عن ذوات الشحنات الموجبة الأخرى.

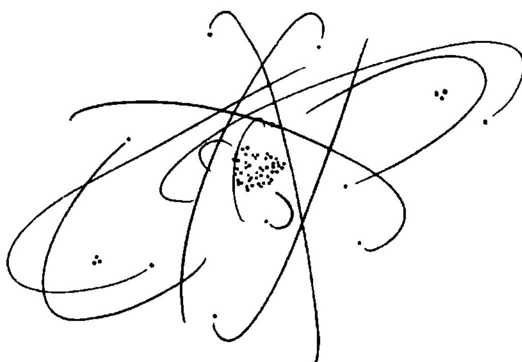
هذا يحدث ببطء شديد، لذلك دعونا نسرع المحاكاة. الآن هذا الانجذاب أو التنافر البطيء يبدو كأنه قاطرة حادة، ترى إلكترونًا (سالبًا) يسقط بسرعة باتجاه «بروتون» (موجب صرف). إنها تتسارع مع اقترابها، بسرعة كبيرة إلى درجة أنها تتخطى البروتون مباشرة. عندما يبتعد، يتباطأ، ثم يعود في الحركة إلى الخلف الآن بسبب البروتون، حتى يغير اتجاهه تمامًا ثم يتحرك بنفس الحركة السابقة لكن في الاتجاه المعاكس مرة أخرى، ومرة أخرى، أزيز ذهابًا وإيابًا بسبب جذب أو سحب البروتون له[٨].



سترى هذا يحدث في كل مكان في الفراغ، في أي وقت يتقابل البروتون مع الإلكترون، إنه هيكلٌ شائعٌ، يمكنك أيضًا تسميته باسم أقصر من «إلكترون يطن ذهابًا وإيابًا حول بروتون»، سنطلق عليه اسمًا ما مثل «الهيدروجين».

وفي بعض الأحيان، تذكر أنها كتلة أكبر من الكواركات، ستة أو تسعة أو أكثر، هذه الحالات نادرة، لكنها تحدث، وهذه المجموعات الأكبر تسحب المزيد من الإلكترونات إلى مدارها. يمكننا إعطاء كل من هذه الأنظمة الصغيرة اسمًا، اعتمادًا على الكمية الإجمالية للشحنة في الكتلة، أسماء مثل «الأكسجين» و«الكلور» و«الذهب».

ربما تعرف بالفعل ما سيحدث بعد ذلك، قُم بتسريع الزمن أكثر، حتى تتحرك الإلكترونات بسرعة كأنها تصنع سحابة من الضباب، وسترى هذه الأنظمة بأكملها (دعنا نسميها «الذرات») تنجرف ببطء عبر الفضاء. في بعض الأحيان تنجرف بعضها عبر بعض من دون إزعاج، لكن في بعض الأحيان يلتصق بعضها ببعض وتبدأ في الانجراف كوحدة واحدة. ستلاحظ أن الهيدروجين والهيدروجين يحبان الانجراف معًا كزوجين، بينما يفضل الأكسجين الانجراف مع بقاء الهيدروجين عالقًا على جانبيه (يصطحب ذرتي هيدروجين معًا على جانبيه).



" water "

ما زلنا لم نقدم أي قواعد جديدة، ما زلنا نشغل نفس المحاكاة، على مدى أزمنة أطول وأطول، في كل مرة نلاحظ فيها ظاهرة «جديدة»، لا تزال قابلة للتفسير من حيث القواعد الأساسية.

الارتباط، على سبيل المثال؟

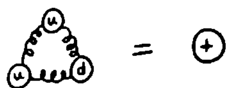
هذه الإلكترونات في تتبع قواعد تفاعلها، عندما يقترب اثنان من الهيدروجين أحدهما من الآخر، تبدأ إلكتروناتهما بشكلٍ طبيعي بالدوران حول بروتونات كليهما، وتجمعهما معًا. فقط عندما تقرب الصورة وتسرع الزمن، فإنها تبدو كقاعدة جديدة: «الهيدروجين يتحرك في أزواج».

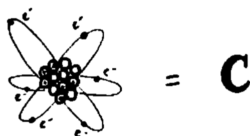
ربما ترى إلى أين يتجه هذا، لذا دعني أصل بك مباشرة إليه، هذه الهياكل الضخمة الجديدة -«الجزيئات»، دعنا نقول- تتصرف أيضًا بطرقٍ معينة يمكن التنبؤ بها، وتشكل أحيانًا جزيئات ضخمة عملاقة: الدهون، والبروتينات، والأحماض النووية الريبية، وحديقة حيوانات كاملة.

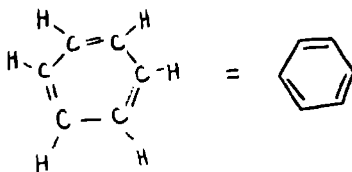
ولكل منها خصائصها وسلوكياتها الخاصة، وتشكل أحيانًا هياكل أكبر تسمى العضيات organelle، التي تتحد لتشكِّل هياكل أكبر تسمى الخلايا. (مزيد من التقريب، تسريع الزمن) بعض الخلايا تتوقف عن العمل من تلقاء نفسها، بينما يتفاعل البعض الآخر بعضها مع بعض في وحدات تسمى الأعضاء، التي بدورها تتفاعل بعضها مع بعض في وحدات تسمى الكائنات الحية. تتجمع بعض الكائنات الحية معًا في مجموعات أو مؤسسات اجتماعية، والتي تتجمع بدورها معًا لتشكل طبقات أو قبائل، ثم تتفاعل لتشكيل مجتمع بأكمله؛ عندما تتفاعل المجتمعات، فهذا يسمى التاريخ، وهذا يتعلق بالقدر الذي أستطيع تناوله في هذه القصة.

لأنها قصة -أليس كذلك؟- من الواضح أنني أبالغ هنا، لم يقم أحد مطلقًا بإجراء محاكاة فيزيائية أوجدت بالفعل مجتمعات بشرية، أو حتى هياكل خلوية أساسية، كيف يمكنهم ذلك؟ إنه غير ممكن، عدد الأشياء التي يجب الاحتفاظ بالبيانات عليها هو -حرفيًّا- عدد الجسيمات في الكون، لذلك ببساطة لا توجد مساحة كافية.

إنها قصة، نعم، لكنها قد تكون قصة حقيقية! على أقل تقدير، إنها قصة بها الكثير من العناصر الحقيقية، نستنتج كل خطوة في هذه السلسلة من بعض النماذج العلمية الناجحة للغاية. يعتقد الكيميائيون أن الماء يتكوَّن من هيدروجين وأكسجين، وهذه النظرية لم تقدم تنبؤًا خاطئًا حتى الآن، يعتقد الاقتصاديون السلوكيون أنه يمكنك تفسير السلوك الاقتصادي للناس من حيث العوامل النفسية والعصبية، إنه مثل سباق التتابع الطويل، حيث يتولى كل مجال من مجالات الدراسة دوره في كل لفة.







ومع ذلك، من المعقول تمامًا الاعتقاد بأن هذه ليست القصة كاملة؛ هناك فجوات في فهمنا قد تجدها مريبة. لا أحد يستطيع أن يقول إنه يعرف بالضبط كيف ينشأ السلوك البشري من ومضات كهربائية في دوائر الخلايا العصبية بشكل حقيقي. الذكاء الصناعي يجعل الفكرة معقولة، لكننا لم نضع الآليات الدقيقة. يمكنك أن تأخذ هذا على أنه مقدمة لتقول إن هناك شيئًا آخر يحدث هنا، بعض الصلصة السرية التي تُضاف على مستوى أدمغة الإنسان، ولا يمكن تفسيرها من حيث تفاعلات الكواركات والإلكترونات.

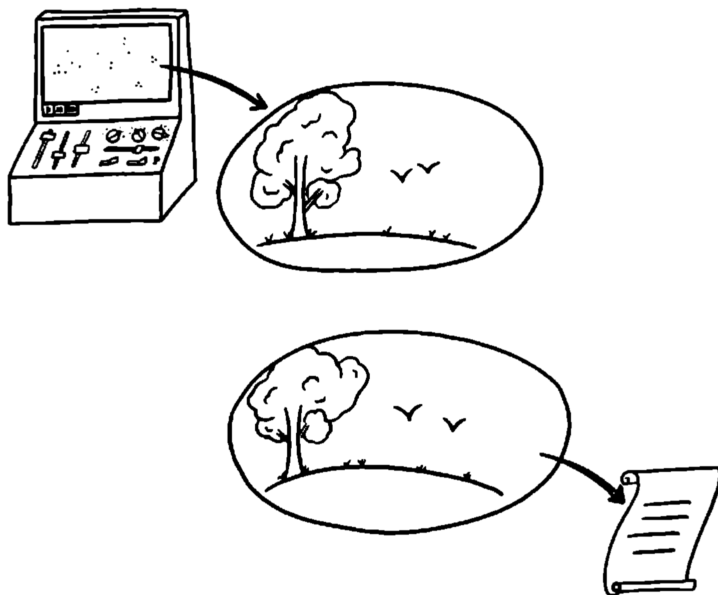
على الرغم من ذلك، يبدو أن معظم الأشخاص المهتمين بالرياضيات الذين تحدثت إليهم يدركون بشكلٍ عام أن شيئًا قريبًا جدًّا من هذه القصة صحيح. يعتقدون أن الفجوات عرضية أو مؤقتة وسيتم سدها في النهاية، لقد شُرِحَ بالفعل الكثير من حيث النماذج الرياضية البسيطة: حركات النجوم، وتنوع الحياة على الأرض، والكوارث الطبيعية والطقس، وتشكيل النظام الشمسي، لماذا نعتقد أن الباقي مختلف؟

يسمي الفلاسفة هذه النظرة العالمية بـ «الطبيعية» أو «الطبيعية العلمية» وهي تستحق التفكير في الآثار المترتبة عليها. إذا كان هذا صحيحًا، إذا كان المذهب الطبيعي العلمي صحيحًا، فإن الواقع كله يخضع لقواعد رياضية صارمة. يجب أن يكون الكون بأكمله متطابقًا مع بعض **الآلية** التي يتم معايرتها بعناية، كل ما يدور حولك، ناهيك عن ذكر ما بداخلك، هو نتيجة رياضية مباشرة لقوانين الطبيعة بالإضافة إلى التكوين الأولي للكون.

وهي فكرة رائعة ومربكة وخلابة.

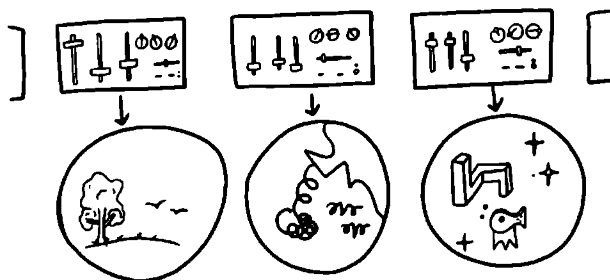
إنها تثير بعض الأسئلة الفلسفية الكبيرة، على أقل تقدير، إذا اشتركت في إصدار ما في إطار عمل الطبيعة هذا، فإليك ثلاثة أشياء يجب أن تتساءل عنها في رحلتك التالية.

هل هذه القواعد الرياضية قوانين طبيعية فعلية، حسنة النية، تحكم بطريقة ما تطور الكون؟ أم أن الكون موجود ويتغير بمرور الوقت كحقيقة قاسية، وهذه «القواعد» مجرد أنماط وجدناها فيه؟

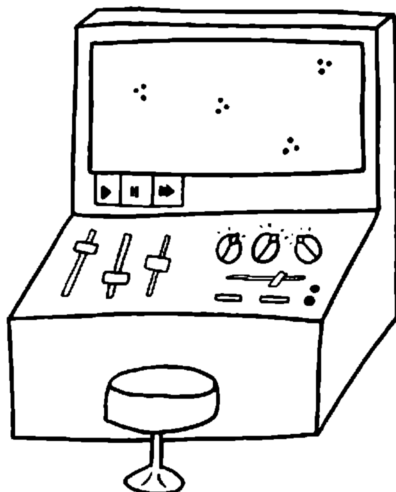


في كلتا الحالتين، لماذا توجد هذه القواعد؟ تبدو غريبة وعشوائية للغاية، لماذا يجب أن يوجد هذا الكون وليس كونًا آخر؟ هل يوجد كل كون رياضي يمكن تصوره بنفس الطريقة التي يوجد بها هذا الكون؟ أم هل نحن مميزون بطريقة ما، ويتم اختيارنا بشكلٍ فريدٍ من بين العوالم

الممكنة التي يمكن إنشاؤها، بشكلٍ ملموسٍ، وحقيقي؟



وحتى لو كان الأمر كله مجرد قواعد رياضية، وحتى إذا كنا نعيش فيما هو في الأساس محاكاة عملاقة واحدة فائقة التعقيد، فإن السؤال الكبير القديم يظل بلا إجابة؛ هل هناك أي نوع من النية أو التصميم أو التخطيط أو الذكاء أو البصيرة أو الرغبة أو الدفء أو الاهتمام في البرمجة؟



أشك في أننا سنجد إجابات عن هذه الأسئلة في أي وقتٍ قريبٍ، وقد لا يكون لها «إجابات» حتى بالمعنى القياسي للكلمة، في نهاية

اليوم، كل ما لدينا هو نماذج اخترعناها، ويقتصر كل نموذج على نطاقٍ معينٍ.

هذا النموذج، النموذج القياسي، يهدف بالتأكيد إلى ما هو أعلى من نظرية الموسيقى أو الاقتصاد. يقوم بعمل تنبؤات عددية بدقة تتجاوز عشرة منازل عشرية، والتي تتحقق مرارًا وتكرارًا في التجارب. إنه يقدم تفسيرًا موحدًا لجميع الظواهر التي لوحظت في الطبيعة تقريبًا، حيث يجمع ويعمق الصور المختلفة التي قدمتها النماذج الأخرى. وتأتي مجمعة من خلال قصة شاملة، هذه الرؤية للواقع يمكن اعتبارها على أنها تجمع بين زليونات النقاط الصغيرة (رقم كبير)، التي يجدها الكثير من الناس جميلة، ومتواضعة، وحتى مذهلة.

لكن هذا ليس كل شيء.

لديها نقاط عمياء.

أعني، النموذج القياسي الحالي لا يشرح الجاذبية! (يعمل منظرو الأوتار بجدٍّ لإصلاح هذا الخطأ المحرج).

ربما ليس من المستغرب أن نكون قادرين على إيجاد كائن رياضي يعكس واقعنا من كثب، الهدف النهائي للرياضيات النظرية هو جمع وتحليل جميع النماذج الممكنة، وجميع الهياكل والأشكال والأنظمة الممكنة، وجميع أشكال المنطق والحجة، تحت سقفٍ واحدٍ.

إنها تحاول ترجمة كل شيء يمكن تصوره أو حتى لا يمكن تصوره في لغة مشتركة، ومجموعة كونية واحدة من الرموز والتقنيات، إنه

مشروع يبدو في ظاهره شائنًا ومستحيلًا، نجاح هذا المشروع المستمر في شرح وتوقع ظواهر حياتنا اليومية هو نعمة غريبة لا نفهمها بالكامل.

على أقل تقدير، إنه أمرٌ مثيرٌ للاهتمام يجب التفكير فيه.

تقنيًّا...

١ : علينا التفريق بين متعددات الشعب المدمجة compact وغير المدمجة non compact. هذه ليست سوى القائمة الكاملة لمتعددات الشعب التي على شكل صحيفة المدمجة، باستثناء متعددات الشعب على شكل مستوى وهي من النوع غير المضغوط. تشتمل متعددات الشعب غير المدمجة الإضافية على متعددات شعب لا نهائية، مثل متعددات الشعب على شكل قرص disk اللا نهائية؛ متعددات الشعب ذات الحدود «المفتوحة» غير المرئية، مثل القرص الذي حذفت دائرته الخارجية؛ وبعض الأشكال الغريبة الأخرى مثل طارة ذات ثقوب لا نهائية ذات حجمٍ محدودٍ.

٢ : لا تتطابق نقطتا النهاية في الاستمرارية ذات الطول المحدود مع أي شيء، لذا فهذه ليست في الواقع مطابقة مثالية. لكنه يُظهر أن الاستمرارية المحدودة هي على الأقل كبيرة مثل الاستمرارية اللا نهائية. لكن من الواضح أن الاستمرارية اللا نهائية كبيرة على الأقل مثل الاستمرارية المحدودة أيضًا، لذلك يجب أن تكون بنفس الحجم.

٣: هناك مشكلة بسيطة في نظام التسمية هذا، LRRRRR.. و RLLLLL.. وكلاهما يشير إلى نفس النقطة (الوسطى) في السلسلة. في الواقع، أي نقطة على علامة نصف مثالية، وربع علامة، وثمن علامة، إلخ، سيكون لها اسمان، لذلك لا نعرف في الواقع أن عدد النقاط على السلسلة المتصلة هو نفسه عدد عناوين LR - يمكن أن يكون أقل.

لإثبات وجود عدد من النقاط على الأقل مثل عناوين LR، افترض نظام تسمية مختلف. اقسم إلى ثلاثيات في كل مرة بدلًا من النصفين، باستخدام L لليسار، وM للوسط، وR لليمين. لا يزال كل عنوان LR يترجم إلى نقطة ضمن نظام التسمية الجديد هذا، ولا توجد تداخلات هذه المرة (على سبيل المثال، الاسم البديل لـ LRRRRR... في ظل النظام الجديد هو MLLLLL..، وهو ليس عنوان LR) لذا فإن هناك عددًا كبيرًا من النقاط على الأقل مثل عناوين LR.

٤ : أي حاوية لها نفس الشكل (من الناحية الطوبولوجية) مثل الكرة المفرغة. على سبيل المثال، يمكن أن تحتوي الحاوية التي على شكل دونات على تدفق من دون نقطة ثابتة، هذه النظرية صحيحة في كل بعد.

٥: لا يمكن أيضًا أن تحتوي على أي «حلقات»، هذا الدليل لا يعمل إلا إذا لم تكن هناك طريقة للعبة للدوران ذهابًا وإيابًا بين نفس المواضع إلى أجل غير مسمى. تمتلك العديد من الألعاب قواعد «الرسم بالتكرار»، وفي هذه الحالة تظل النظرية سارية.

٦ : لإثبات الحقائق حول الأعداد الأولية فعليًّا، تحتاج إلى إضافة بعض البديهيات التي تحدد بالضبط مفهوم «الأولية»، هذه ليست

سوى البديهيات الخمس الأساسية، وكل مفهوم جديد تريد استخدامه سيتطلب المزيد من البديهيات.

٧: طول اليوم ليس بالضبط حركة توافقية بسيطة، ولكنه تقريبٌ مقرب جدًّا، هناك قيمة خطأ صغيرة تصبح أكثر أهمية كلما ابتعدت عن خط الاستواء، في القطب الشمالي والقطب الجنوبي، ينهار التقريب تمامًا وتدور الشمس في الأفق لعدة أشهر في كل مرة.

٨: سأستبعد عنصرًا أساسيًّا من النموذج هنا، إذا كانت هذه هي القواعد الحقيقية، فسوف يفقد الإلكترون طاقته تدريجيًّا ويسقط في النواة، في النموذج القياسي الفعلي يوجد حدٌّ أدنى من «الكم» من الطاقة يمنع حدوث ذلك.

أمر أخير يا أصدقائي..

هناك لغز إضافي مخبأ في هذا الكتاب.

والحل عبارة عن رقم.

فهل عرفتموه؟

عن الكاتب

ميلو بيكمان عاشق للرياضيات منذ صغره، وُلِد في مانهاتن في عام ١٩٩٥، وبدأ في تلقي دروس الرياضيات في مدرسة Stuyvesant الثانوية في سن الثامنة، وكان قائد فريق مدينة نيويورك للرياضيات في سن الثالثة عشرة. ظهرت مشروعاته المتنوعة وأبحاثه المستقلة في نيويورك The New York Times، وFiveThirtyEight، وGood Morning America، وSalon، وHuffington Post، وThe Chronicle of Higher Education، وBusiness Insider، و The Boston Globe، وGothamist، وThe Economist، وغيرها. عمل في ثلاث شركات تكنولوجية ومصرفيْن ولدى عضو في مجلس الشيوخ الأمريكي قبل تقاعده في سن التاسعة عشرة لتدريس الرياضيات في نيويورك والصين والبرازيل والعمل على هذا الكتاب.

عن تصميم رسوم الكتاب

«دور الفنان هو جعل الثورة لا تقاوم».

- توني كيد بامبارا

من قام بالرسم هو إم، وبهذا الشكل قدَّمه الكاتب، وهو شخص ينتمي إلى هوية جنسية غير ثنائية، يعيش مع زوجته، لديه أعماله الفنية ونشاط في بعض المجالات التي تناسب أفكاره ومع منظمات داخل المجتمع الأمريكي.

التعريف بالمترجم

مصطفى أحمد علي العدوي، مهندس كهرباء.. حاصل على درجة الماجستير في الهندسة الكهربائية ٢٠١٦، له عددٌ من الأبحاث في مجالات الهندسة والطاقة، المشرف السابق لفريق الفيزياء والفلك والهندسة بمبادرة «أنا أصدق العلم»، له ٢٠٠ مقال علمي مترجم في مبادرات: أنا أصدق العلم/ أخبار العلوم/ الباحثون السوريون/ في العلم، مدقق ومترجم بمبادرتي أخبار العلوم/ في العلم.

حصل على المركز الأول للقصة القصيرة في مسابقة نقابة المهندسين المصرية ٢٠١٧، وهو عضو سابق بنادي أدب جامعة المنصورة، وعضو مؤسس لنادي أدب كلية الهندسة جامعة المنصورة.

صدر له ثلاثة مؤلفات أدبية: مجموعتان قصصيتان «الـ....» عن الهيئة العامة المصرية للكتاب في عام ٢٠١٥، و«مجتمع المتوحدين السري» ٢٠١٧، ورواية «وهم كوتارد» الجزائر-٢٠١٩.

صدر له أربع ترجمات عن دار آفاق:

نيلز بور «فيزياء الكم والمعرفة الإنسانية».

متشيو كاكو «معادلة الإله.. البحث عن نظرية كل شيء».

ديفيد بوم «النظرية النسبية الخاصة».

ديفيد بوم «السببية والصدفة في الفيزياء الحديثة».

✖✖ لقد فاز علماء الرياضيات بالحرب..

بعد المقدمة الموسيقية الحالمة والأسطورية لجيمس هورنر التي يبدأ بها فيلم ((عقل جميل)) والذي يجسد حياة عالِم الرياضيات الراحل جون ناش..

ينطلق الممثل الأمريكي جود هيرش بهذه الجملة الملحمية، ليكرِّم بها المجهود العظيم الذي قام به علماء الرياضيات في الحرب العالمية الثانية، ويصنع الحافز للجيل الجديد من علماء الرياضيات بالبحث عن مزيدٍ من الأفكار العلمية الأصيلة التي هي السلاح الأول في مواجهة الأعداء..

فالرياضيات هي اللغة الأصيلة التي تتحدث بها كل العلوم الحديثة، وفي العصر الحديث يصنع الأمة براعة ومهارة علمائها في الرياضيات، وهي التي تتحكَّم من خلال أدواتها الحديثة في مناحي الحياة كافة كالاقتصاد والتكنولوجيا والتصنيع والزراعة وحتى الطب..

في هذا الكتاب يقدِّم ميلو بيكمان تحفة فنية، وبأسلوبٍ سهلٍ ممتنعٍ، شرحًا بديعًا لأسس الرياضيات، يغوص في عمق فلسفة الرياضيات دون تعقيدٍ أو تضييع القارئ في متاهة من الأرقام.. ابتداءً من أسس الرياضيات البحتة وانتهاءً بالتطبيقات الرياضية مثل النمذجة وعلوم الفيزياء..

وميلو بيكمان رياضي عمل في ثلاث شركات تكنولوجية ومصرفيْن، وفي تدريس الرياضيات في نيويورك والصين والبرازيل.


ISBN 978-977-765-375-6
9 789777 653756



